Versão preliminar
6 de setembro de 2002

Notas de Aula de Física

02. Vetores e escalares

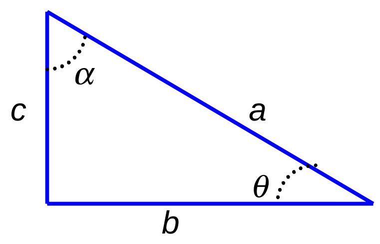
Algumas grandezas físicas ficam completamente definidas quando informamos um número e uma unidade. Quando dizemos que a temperatura de uma pessoa é 37^0C a informação está completa. *A temperatura é uma grandeza escalar*. Se dissermos que a velocidade de um automóvel é de 50km/h não definimos completamente a informação. Não foi dito em que direção e sentido esse corpo se movimentava. A necessidade dessa informação complementar - direção e sentido - *caracteriza a velocidade como um vetor*.

Os vetores são *representados por setas*, e costuma-se representar um vetor com módulo maior que outro por uma seta de tamanho maior. Usamos basicamente de dois modos de representar os vetores, o *método geométrico* e o *método analítico*.

Um pouco de trigonometria

Vamos considerar um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c respectivamente. O teorema de Pitágoras diz que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



As funções seno e cosseno são definidas como:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{c}{a} = \cos\alpha$$

$$\cos\theta = \frac{b}{a} = \operatorname{sen}\alpha$$

E do Teorema de Pitágoras, encontramos que:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2 = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{c}{a} = \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

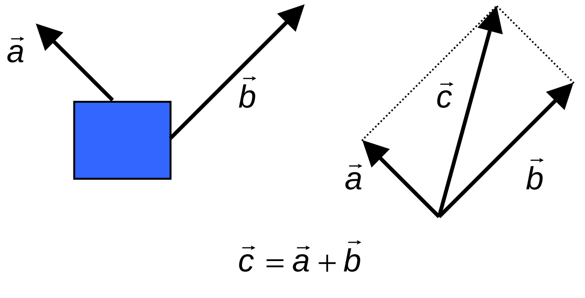
Método geométrico

No *método geométrico*, a visualização dos vetores fica mais óbvia, mas não é adequado para a operações com diversos vetores.

A força é uma grandeza vetorial. Quando consideramos duas forças atuando sobre um dado corpo, o efeito resultante será igual à atuação de uma única força que seja a soma vetorial das duas forças mencionadas.

A soma desses dois vetores pode ser efetuada usando-se a regra do paralelogramo.

Método geométrico

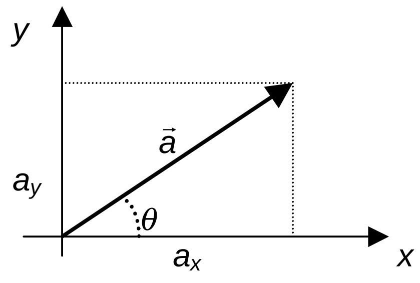


Método analítico

O *método analítico* consiste basicamente em definir um sistema de coordenadas cartesianas e decompor os vetores segundo as suas componentes nestes eixos.

Vamos considerar um sistema de coordenadas bidimensional, definido pelos eixos x e y , como mostrados na figura ao lado. O vetor $\vec{a}$ tem componentes cartesianas a_x e a_y que tem a forma:

$$a_x = a \,.\, \cos\theta$$
$$a_y = a \,.\, sen\theta$$



Ou de maneira inversa:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Uma maneira de representar vetores é através de suas componentes num dado sistema de coordenadas, como foi antecipado na figura anterior. Desse modo:

$$\vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y$$

onde $\hat{i}$ *e* $\hat{j}$ são vetores unitários (ou versores) que apontam nas direções dos eixos x e y respectivamente e têm módulos iguais a *um*.

A soma de dois vetores será então definida como:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad onde \quad \begin{cases} \vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y \\ \quad e \\ \vec{b} = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{c} = \hat{i}\left(a_x + b_x\right) + \hat{j}\left(a_y + b_y\right)$$

ou seja:

$$\vec{c} = \hat{i}c_x + \hat{j}c_y \quad onde \quad \begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ \quad e \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

Multiplicação de vetores

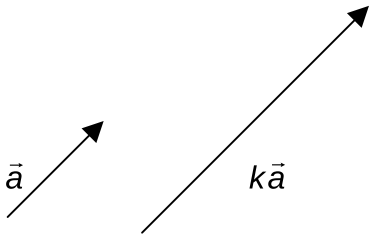
As operações com vetores são utilizadas de maneira muito ampla na Física, para expressar as relações que existem entre as diversas grandezas.

Multiplicação de um vetor por um escalar

Sejam dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e um escalar k. Definimos a multiplicação mencionada como:

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

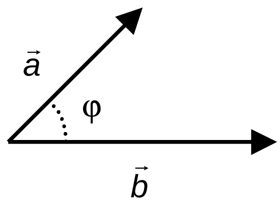
O vetor $k\vec{a}$ tem a mesma direção do vetor $\vec{a}$. Terá mesmo sentido se k for positivo e sentido contrário se k for negativo.



Produto escalar

Define-se o produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como a operação:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$$



onde φ é o ângulo formado pelos dois vetores.

Podemos dizer que o produto escalar de dois vetores é igual ao módulo do primeiro vezes a componente do segundo no eixo determinado pelo primeiro, ou vice-versa. Isso pode-se resumir na propriedade :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Uma aplicação do produto escalar é a definição de trabalho *W* executado por uma força constante que atua ao longo de um percurso *d:*

$$W = \vec{F}.\vec{d} = Fd\cos\theta$$

Usando o conceito de vetor unitário encontramos que:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \left|\hat{i}\right|\left|\hat{i}\right|\cos 0^0 = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$

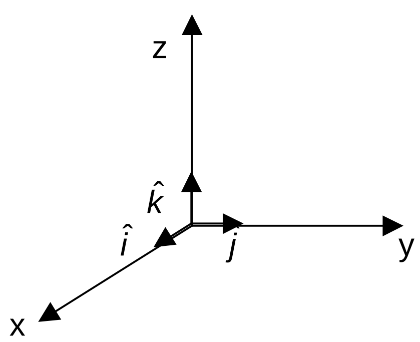
$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

e de modo equivalente:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \left|\hat{i}\right|\left|\hat{j}\right|\cos 90^0 = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$



Podemos utilizar a decomposição de um vetor segundo as suas componentes cartesianas e definir o produto escalar:

$$\vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z$$

$$\vec{b} = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z\right) \cdot \left(\hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z\right)$$

e portanto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Fica fácil perceber que:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

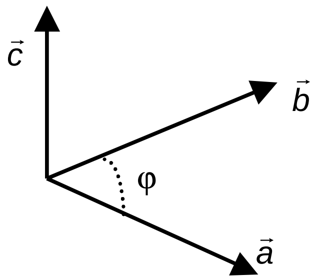
Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$, temos que $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{a\,b}$, e assim poderemos calcular o ângulo entre os dois vetores, em função de suas componentes cartesianas:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

<u>Produto vetorial</u>

Define-se o produto vetorial de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como a operação:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$



e módulo c é definido como:

$$c = ab\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

onde $\vec{c}$ é um vetor perpendicular ao plano defino pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e φ é o ângulo formado por esses dois últimos dois vetores.

Uma aplicação do produto vetorial é a definição da força $\vec{F}$ que atua em uma carga elétrica q que penetra com velocidade $\vec{v}$ numa região que existe um campo magnético $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

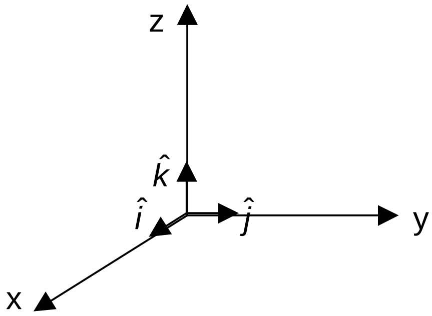
ou ainda:

$$F = q\ v\ B\ sen\varphi$$

Usando a definição de produto vetorial, encontramos que:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i}$$
$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$
$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$



De modo genérico, podemos definir o produto vetorial como:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z\right) \times \left(\hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z\right)$$

e usando os resultados dos produtos vetoriais entre os vetores unitários, encontramos que:

$$\vec{c} = \hat{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \hat{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \hat{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

Usando as propriedades de matrizes, encontramos que o produto vetorial pode ser expresso como o determinante da matriz definida a seguir:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 3 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

02 Quais são as propriedades dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que:

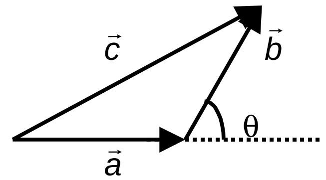
a)
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \text{e} \quad a + b = c$$

Temos que:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

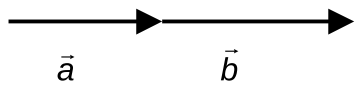
ou seja:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$



Para que c = a + b é necessário que θ = 0 pois

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$



Portanto $\vec{a} \,|\,|\, \vec{b}$

b)
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$$

Da equação acima, temos que:

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{b} + \vec{b} \quad \therefore \quad 2\vec{b} = 0 \quad \therefore \quad \vec{b} = 0$$

c)
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad e \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Como

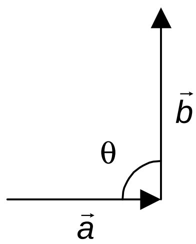
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta\ ,$$

para que

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

devemos ter

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{portanto} \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

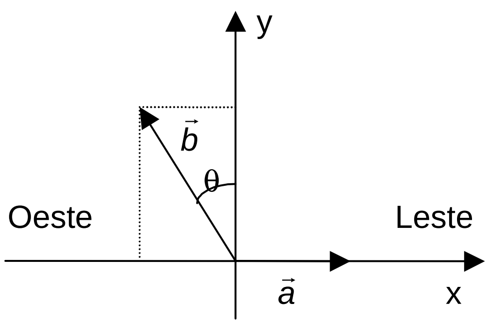


Capítulo 3 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

06 O vetor $\vec{a}$ tem módulo de 3 unidades e está dirigido para Leste. O vetor $\vec{b}$ está dirigido para 35^0 a Oeste do Norte e tem módulo 4 unidades. Construa os diagramas vetoriais para $\vec{a}$ + $\vec{b}$ e $\vec{b}$ - $\vec{a}$. Estime o módulo e a orientação dos vetores $\vec{a}$ + $\vec{b}$ e $\vec{a}$ - $\vec{b}$ a partir desse diagramas.

$$\begin{cases} \vec{a} = \hat{i}a_x \\ \vec{b} = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = a = 3 \\ b_x = -b\,\text{sen}\,\theta = -4\,\text{sen}\,35^0 = -2{,}29 \\ b_y = b\cos\theta == 4\cos 35^0 = 3{,}27 \end{cases}$$



a)

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

$$c_x = 3 - 2{,}29 = 0{,}71$$

$$c_y = 3{,}27$$

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = 3{,}34$$

b)

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} \quad \begin{cases} d_x = b_x - a_x \\ d_y = b_y - a_y \end{cases}$$

$$d_x = -2{,}29 - 3 = -5{,}29$$

$$d_y = 3{,}27$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = 6{,}21$$

Capítulo 3 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
32	Prove que dois vetores devem ter o mesmo módulo para que sua soma seja perpendicular á sua diferença.

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = a^2 - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Capítulo 3 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
39	Mostre que num sistema de coordenadas destrógiro: $$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$ e $$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

A definição de produto escalar é tal que: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos vetores. Logo:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \left|\hat{i}\right|\left|\hat{i}\right| \cos 0^0 = 1.1.1 = 1$$

e

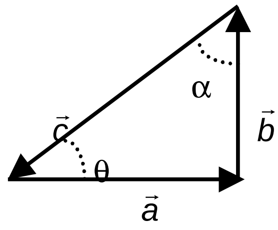
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \left|\hat{i}\right|\left|\hat{j}\right| \cos 90^0 = 1.1.0 = 0$$

Os outros itens seguem-se como extensão desses anteriores.

Capítulo 3 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

45

A soma de três vetores é igual a zero, como mostra a figura. Calcule:



a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = ?$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

b) $\vec{a}\cdot\vec{c}$ = - a c cosθ = -a c (a/c) = - a^2

c) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ = - b c cosα = - b c (b/c) = - b^2

Podemos concluir que:

$$\vec{c}+\vec{a}+\vec{b} = 0$$

$$\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$$

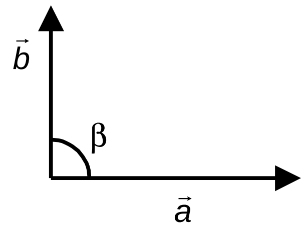
logo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Capítulo 3 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

46 Para o problema anterior, calcule:

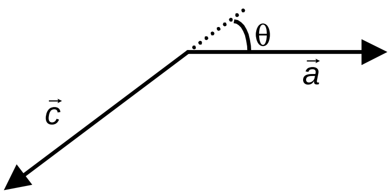
a) $\vec{a}\times\vec{b} = ?$



Suponhamos que o eixo z seja perpendicular ao plano definido pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$\vec{a}\times\vec{b} = \hat{z}$ a b sen(π/2) = $\hat{z}$ a b

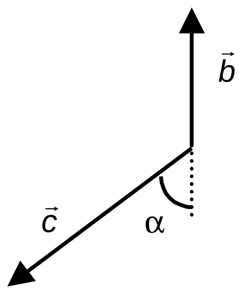
b) $\vec{a}\times\vec{c} = ?$



$\left|\vec{a}\times\vec{c}\right| =$ a c senθ

$\vec{a}\times\vec{c} = (-\hat{z})$ a c senθ = -$\hat{z}$ a c (b/c) = - $\hat{z}$ a b

c) $\vec{b}\times\vec{c} = ?$



$\left|\vec{b}\times\vec{c}\right| =$ b c senα

$\vec{b}\times\vec{c} = \hat{z}$ b c senα = $\hat{z}$ b c (a/c)

$\vec{b}\times\vec{c} = \hat{z}$ a b

Capítulo 3 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

47 **Produto escalar em função das coordenadas:** Suponha que dois vetores sejam representados em termos das coordenadas como:

$$\vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z \quad \text{e} \quad \vec{b} = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z$$

mostre que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Por definição temos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z\right) \cdot \left(\hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z\right)$$

Usando os resultados do problema 39, resolvido anteriormente, temos a resposta pedida.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Capítulo 3 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

51 Dois vetores são dados por $\vec{a} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$ e $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$. Calcule:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ =?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \hat{k}(3.4 - 5.2) = 2\hat{k}$$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ =?

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 3.2 + 5.4 = 26

c) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{b}$ =?

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = \left(5\hat{i} + 9\hat{j}\right) \cdot \left(2\hat{i} + 4\hat{j}\right)$ = 5.2 + 9.4 = 46