

Notas de Aula de Física

04. MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES	2
POSIÇÃO E DESLOCAMENTO	2
VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE INSTANTÂNEA	2
ACELERAÇÃO MÉDIA E ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA	3
MOVIMENTO NUM PLANO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE.....	4
MOVIMENTO DE PROJÉTEIS.....	4
<u>Tiro de gran alcance</u>	7
MOVIMENTO CIRCULAR E UNIFORME	8
MOVIMENTO RELATIVO	10
<u>Coger con la mano una bala disparada!</u>	10
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	11
"19"	11
22	11
30	12
41	13
47	14
49	15
72	15
80	16
83	17
88	17

04. Movimento em duas e três dimensões

A nossa experiência cotidiana está repleta de exemplos de movimentos bi e tridimensionais. Podemos até dizer que são raras as situações com movimentos unidimensionais. Quando saímos de nossa cama para a sala, certamente usamos um movimento bidimensional ao chegar até a porta e caminhando pelo corredor para atingir a sala. Num automóvel em movimento, além do movimento bidimensional, segundo os pontos cardiais, as estradas têm elevações e baixios, de modo que percorremos um caminho tridimensional.

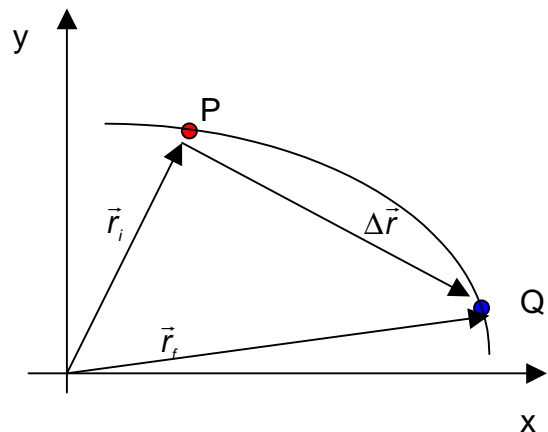
Posição e deslocamento

Vamos considerar um sistema de coordenadas x - y para analisar o movimento de uma partícula do ponto inicial P ocupado no instante t_i até o ponto final Q ocupado no instante t_f .

A ponto inicial P é localizado pelo vetor posição \vec{r}_i e o ponto final Q é localizado pelo vetor posição \vec{r}_f .

O vetor deslocamento é definido por:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$



Onde

$$\vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i$$

$$\vec{r}_f = \hat{i}x_f + \hat{j}y_f + \hat{k}z_f$$

$$\Delta\vec{r} = \hat{i} \Delta x + \hat{j} \Delta y + \hat{k} \Delta z$$

Velocidade média e velocidade instantânea

A velocidade pode ser entendida como a variação no tempo do vetor deslocamento.

Definimos a velocidade média em duas ou três dimensões fazendo uma extensão da definição usada para o movimento retilíneo, ou seja:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}$$

ou ainda:

$$\bar{\vec{v}} = \hat{i} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{j} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \hat{k} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

A velocidade instantânea é definida como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

e em coordenadas cartesianas:

$$\vec{v} = \hat{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \hat{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \hat{i} \frac{dx}{dt} + \hat{j} \frac{dy}{dt} + \hat{k} \frac{dz}{dt}$$

ou seja:

$$\vec{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z$$

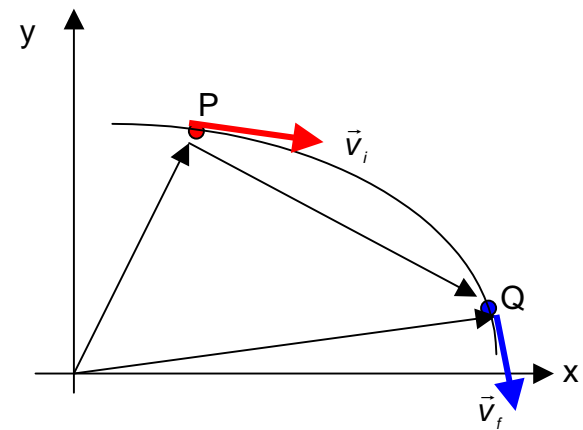
Aceleração média e aceleração instantânea

Quando uma partícula se move com velocidade \vec{v}_i no instante t_i e com velocidade \vec{v}_f no instante t_f , definimos a sua aceleração média como:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

A aceleração instantânea é definida como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



e em coordenadas cartesianas:

$$\bar{\vec{a}} = \hat{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} + \hat{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \hat{i} \frac{dv_x}{dt} + \hat{j} \frac{dv_y}{dt} + \hat{k} \frac{dv_z}{dt}$$

ou seja:

$$\vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z$$

Movimento num plano com aceleração constante

Vamos considerar que a partícula se mova no plano $x-y$ com aceleração constante. Para um movimento nesse plano teremos:

$$\begin{cases} \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y \\ \vec{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y \\ \vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y \end{cases}$$

e considerando que a aceleração é constante teremos as equações para o movimento segundo o eixo x :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 \\ v_x &= v_{0x} + a_x(t - t_0) \\ v_x^2 &= v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \end{aligned}$$

e as equações para o movimento segundo o eixo y :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2 \\ v_y &= v_{0y} + a_y(t - t_0) \\ v_y^2 &= v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) \end{aligned}$$

As equações anteriores podem ser sintetizadas nas formas vetoriais:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ v^2 &= v_0^2 + 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \end{aligned}$$

Movimento de projéteis

O movimento dos projéteis é uma situação onde uma partícula se move num plano, com movimento de aceleração constante em uma direção e movimento de velocidade constante em outra direção.

Vamos considerar que $a_x = 0$ e que $a_y = -g$, e desse modo, as equações para esse movimento serão para o eixo x :

$$x - x_0 = v_{0x}t \tag{1}$$

e para o eixo y:

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (3)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \quad (4)$$

Considerando $x_0 = y_0 = 0$, na equação (1), temos

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

usando esse resultado na equação (2), temos:

$$y = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$

ou seja

$$y = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2$$

A equação anterior é do tipo:

$$y = b x - c x^2$$

Se completarmos os quadrados na equação anterior, teremos:

$$\left(y - \frac{b^2}{4c}\right) = -c\left(x - \frac{b}{2c}\right)^2$$

Essa é a equação de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, e tem como coordenadas do ponto de altura máxima:

$$\begin{cases} x_M = \frac{b}{2c} \\ y_M = \frac{b^2}{4c} \end{cases}$$

Considerando que:

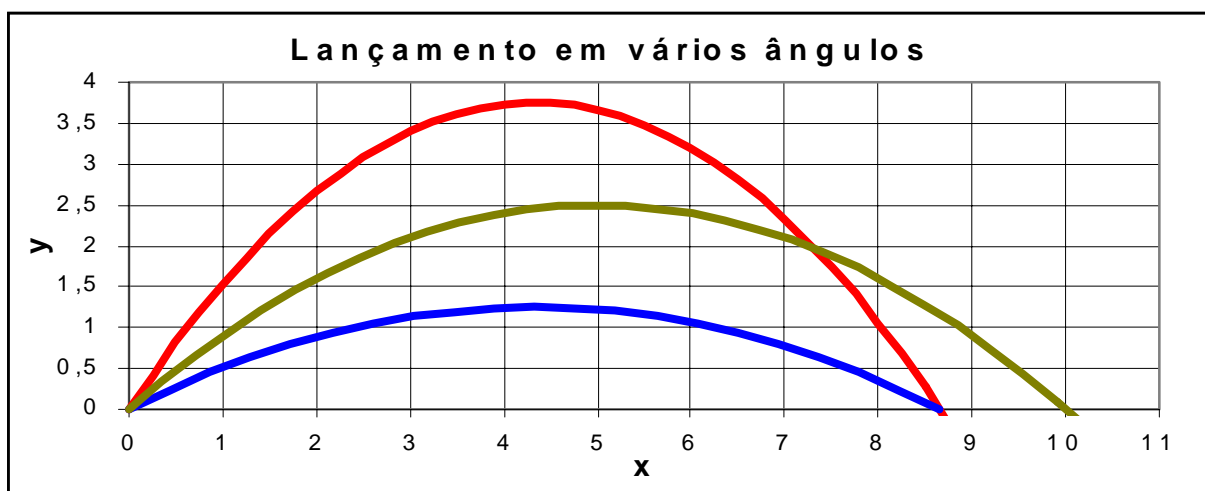
$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 \end{cases}$$

encontramos que:

$$\begin{cases} x_M = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{2g} \\ y_M = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g} \end{cases}$$

Como a parábola é uma curva simétrica, a distância percorrida ao longo do eixo x , também conhecida como alcance R tem o valor $R = 2 x_M$, ou seja:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$



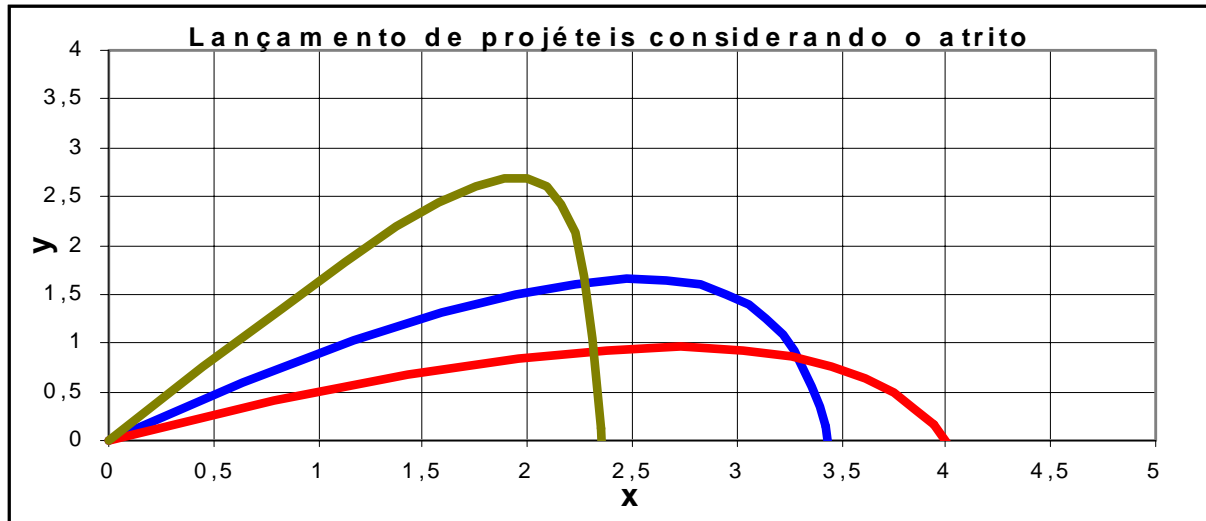
com a mesma velocidade inicial e para ângulos de 30° , 45° e 60° .

Da trigonometria, podemos encontrar que quando dois ângulos diferentes têm o mesmo seno, a soma desses ângulos deve ser igual a 180° , ou seja:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \therefore \alpha = 90^\circ - \beta$$

ou seja, dois lançamentos cujos ângulo somam 90° têm o mesmo alcance, como mostra a figura anterior para os ângulos 30° e 60° . Podemos mostrar, então, que o alcance máximo é obtido quando o ângulo de lançamento vale 45° , como mostra a terceira curva da figura anterior.

Uma análise mais realista do movimento dos projéteis deverá levar em conta o seu atrito com o ar. Essa força de atrito é considerada como uma função da velocidade. Num caso mais simples, se a força de atrito for considerada proporcional à velocidade de deslocamento, nós podemos avaliar os seus efeitos no movimento dos projéteis no gráfico a seguir.



para os mesmos ângulos e velocidades iniciais da figura anterior.

Tiro de gran alcance

Al final de la primera guerra mundial (1918), cuando los éxitos de la aviación francesa e inglesa dieron fin a las incursiones aéreas enemigas, la artillería alemana puso en práctica, por primera vez en la historia, el bombardeo de ciudades enemigas situadas a más de cien kilómetros de distancia. El estado mayor alemán decidió emplear este nuevo procedimiento para batir la capital francesa, la cual se encontraba a más de 110 km del frente. Hasta entonces nadie había probado este procedimiento. Los propios artilleros alemanes lo descubrieron casualmente. Ocurrió esto al disparar un cañón de gran calibre con un gran ángulo de elevación. Inesperadamente, sus proyectiles alcanzaron 40 km, en lugar de los 20 calculados. Resultó, que estos proyectiles, al ser disparados hacia arriba con mucha inclinación y gran velocidad inicial, alcanzaron las altas capas de la atmósfera, en las cuales, debido al enrarecimiento, la resistencia del aire es insignificante. En este medio poco resistente es donde el proyectil recorrió la mayor parte de su trayectoria, después de lo cual cayó casi verticalmente a tierra.

La figura muestra claramente la gran variación que experimentan las trayectorias de los proyectiles al cambiar el ángulo de elevación. Esta observación sirvió de base a los alemanes para proyectar un cañón de gran alcance, para bombardear París desde una distancia de 115 km. Este cañón terminó de fabricarse con éxito, y durante el verano de 1918 lanzó sobre París más de trescientos proyectiles. He aquí lo que después se supo de este cañón. Consistía en un enorme tubo de acero de 34 m de largo y un metro de grueso. El espesor de las paredes de la recámara era de 40 cm. Pesa ba en total 750 t. Sus proyectiles tenían un metro de largo y 21 cm de grueso, y pesaban 120 kg. Su carga requería 150 kg de pólvora y desarrollaba una presión de 5 000 atmósferas, la cual disparaba el proyectil con una velocidad inicial de 2 000 m/seg. El fuego se hacía con un ángulo de elevación de 52' y el proyectil describía un enorme arco, cuyo vértice o punto culminante se encontraba a 40 km de altura sobre la tierra, es decir, bien entrado en la estratosfera. Este proyectil tardaba en recorrer los 115 km, que mediaban entre el emplazamiento del cañón y París, 3,5 minutos, de los cuales, 2 minutos volaba por la estratosfera. Estas eran las características del primer cañón de ultralargo alcance, antecesor de la moderna artillería de este género.

Cuando mayor sea la velocidad inicial de la bala (o del proyectil), tanto mayor será la resistencia del aire. El aumento de esta resistencia no es proporcional al de la velocidad, sino más rápido, es decir, proporcional al cuadrado, al cubo y a potencias aún mayores del aumento de la velocidad, según el valor que ésta alcance.

Física Recreativa - Yakov Perelman

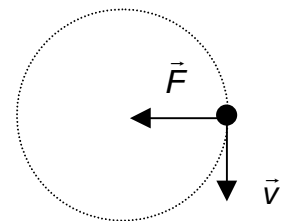
Movimento circular e uniforme

Se um corpo está se movimentando em círculos com velocidade constante em módulo, ele necessariamente estará sob a ação de uma força. Essa força \vec{F} pode ter as mais diversas origens: gravitacional, elétrica, magnética, e etc. Mas algumas grandezas ligadas a esse movimento estão relacionadas do seguinte modo:

$$F = ma \quad \text{onde} \quad a = \frac{v^2}{R}$$

onde m é a massa do corpo, R é o raio da órbita e v é a sua velocidade. A velocidade pode ser definida como:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi f R = w R$$



onde T é o período, f é a frequência, e w é a frequência angular. A unidade de T é segundo, a unidade de f é 1/segundo = Hertz, e a unidade de w é radiano/segundo. Desse modo, a frequência angular tem como unidade natural o radiano/segundo, mas pode ser expressa em rotações/minuto:

$$1 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} = 1 \frac{1}{2\pi} \frac{\text{rot}}{\text{seg}} = \frac{60}{2\pi} \frac{\text{rot}}{\text{min}}$$

Por exemplo, qual deve ser a velocidade angular, em rotações por minuto, que um corpo deve girar para que a sua aceleração seja 50 vezes a aceleração da gravidade?

$$F = m \frac{v^2}{R} = 50 m g \quad \therefore \frac{v^2}{R} = 50 g$$

mas, como vimos anteriormente $v = wR$, logo:

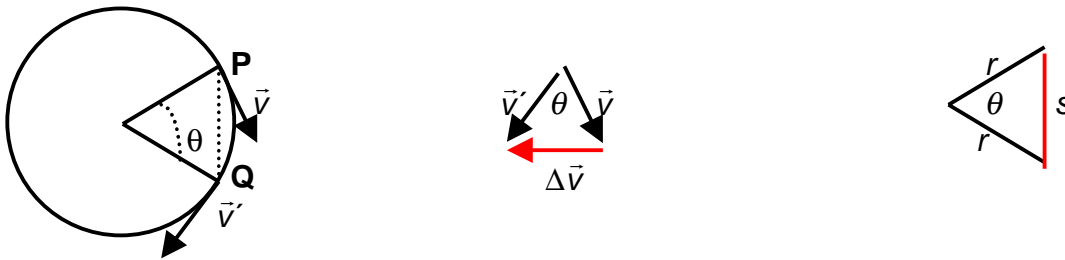
$$w^2 R = 50 g \quad \therefore w = \sqrt{\frac{50 g}{R}} \text{ rad / seg}$$

e finalizando:

$$w = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{50 g}{R}} \text{ rot / min}$$

onde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e R é o raio da órbita do corpo, ou o raio de centrifugação.

Para deduzir a equação da aceleração usada inicialmente, vamos considerar que num dado instante o corpo está no ponto P com velocidade \vec{v} e que um intervalo de tempo Δt posterior esteja no ponto Q com velocidade seja \vec{v}' , de modo que essas duas velocidades tenham o mesmo módulo v .



A variação do vetor velocidade é dado por $\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$, e vamos considerar como θ o ângulo formado pelos vetores \vec{v} e \vec{v}' . Esse triângulo formado pelos vetores mencionados é isósceles já que os vetores \vec{v} e \vec{v}' têm mesmo módulo. Podemos definir um outro triângulo isósceles formado pela reta que une o centro do triângulo ao ponto P , pela reta que une o centro deste mesmo triângulo ao ponto Q e pela corda s que une os pontos P e Q . Esses dois triângulos são equivalentes pois os lados iguais fazem entre si o mesmo ângulo θ .

A equivalência entre os triângulos é expressa pela equação:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{s}{r}$$

A trajetória do corpo em movimento circular é, naturalmente, ao longo da curva, e não ao longo da corda s , mas para um intervalo de tempo Δt pequeno, podemos aproximar a corda pela curva. O comprimento da curva a considerar é o espaço percorrido pelo corpo com velocidade constante, ou seja:

$$\text{curva} = v \Delta t$$

logo

$$\text{corda} = s \approx v \Delta t$$

portanto

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{v \Delta t}{r} \quad \therefore \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r}$$

No limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ a aproximação da corda pela curva torna-se uma igualdade:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Vale a pena enfatizar que a direção da aceleração é perpendicular ao vetor velocidade. Deve-se notar, portanto, que não é necessário existir movimento na direção da aceleração.

Movimento relativo

Os resultados da observação de um evento dependem do referencial usado pelo observador. Um acontecimento que ocorre no interior de um vagão de um trem tem uma aparência para observadores fixos no interior desse trem e uma outra aparência diferente para observadores fixos nos trilhos.

Vamos considerar dois referenciais S e S' , considerando que S' move-se com velocidade constante \vec{u} em relação a S .

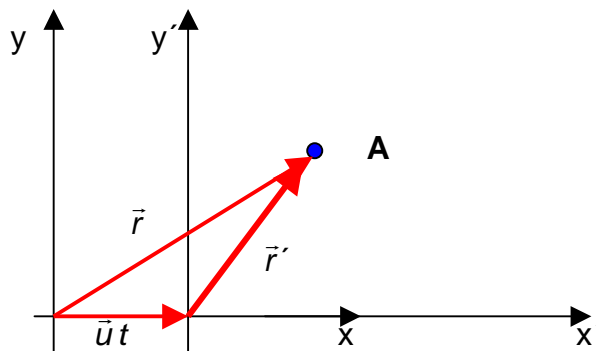
Um evento que é localizado no referencial S pelo vetor posição \vec{r} , será localizado no referencial S' pelo vetor posição \vec{r}' é esses dois vetores estão relacionados do seguinte modo:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

A velocidade com que um dado corpo se move é medida de maneira diferente por cada um desses referenciais.

Se para um observador no referencial S a velocidade é \vec{v} , para um outro observador no referencial S' a velocidade é \vec{v}' . Encontramos a maneira como essas velocidades estão relacionadas derivando a relação entre os vetores posição:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u} \quad \therefore \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$



Coger con la mano una bala disparada!

Durante la primera guerra mundial, según información de prensa, a un aviador francés lo ocurrió un caso extraordinario. Cuando iba volando a dos kilómetros de altura, este aviador se dio cuenta que junto a su cara se movía una cosa pequeña. Pensó que sería algún insecto, y, haciendo un ágil movimiento con la mano, lo cogió. Cuál sería su sorpresa cuando comprendió, que lo que acababa de cazar era... ¡una bala de fusil alemana! ¿Verdad que esto recuerda los cuentos del legendario barón Münchhausen, que también aseguró haber cogido una bala de cañón con las manos?

No obstante, esta noticia sobre el piloto que cogió la bala, no tiene nada de imposible. Las balas no se mueven durante todo el tiempo con la velocidad inicial de 800-900 m por segundo, sino que, debido a la resistencia del aire, van cada vez más despacio y al final de su trayectoria, pero antes de empezar a caer, recorren solamente 40 m por

segundo. Esta era una velocidad factible para los aeroplanos de entonces. Por consiguiente, la bala y el aeroplano podían volar a una misma velocidad, en un momento dado, y, en estas condiciones, aquélla resultaría inmóvil o casi inmóvil con relación al piloto. Es decir, éste podría cogerla fácilmente con la mano, sobre todo con guante (porque las balas se calientan mucho al rozar con el aire).

Física Recreativa - Yakov Perelman

Solução de alguns problemas

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - **Edição antiga**

"19" Um malabarista consegue manter simultaneamente cinco bolas no ar, todas atingindo uma altura máxima de $3m$.
Encontre o intervalo de tempo entre duas bolas que chegam às suas mãos. Considere que os intervalos são os mesmos para todas as bolas.

Vamos considerar t o tempo necessário para que uma bola atinja a altura máxima de $h = 3m$. Logo $T = 2t$ é o tempo que cada bola permanece no ar até cair de volta nas mãos do malabarista.

Se tivéssemos apenas duas bolas, jogaríamos a primeira bola e após $T/2$ jogaríamos a segunda bola.

Como temos cinco bolas, jogaríamos a primeira, após $T/5$ jogaríamos a segunda, após $T/5$ jogaríamos a terceira, após $T/5$ jogaríamos a quarta e finalmente após $T/5$ jogaríamos a quinta bola. A seguir pegaríamos a primeira que permaneceu $5T/5$ no ar. Vamos chamar de Δt o intervalo entre a chegada de duas bolas, logo:

$$\Delta t = \frac{T}{5} = \frac{2t}{5}$$

Considerando que o tempo de descida é o mesmo que o de subida, soltando uma das bolas ela terá um movimento tal que:

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,31s$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

22 Um projétil é atirado horizontalmente de uma arma que está $45m$ acima de um solo plano. A velocidade na saída do cano é $250m/s$.

a) Por quanto tempo o projétil permanece no ar?

$$h = 45\text{m}$$

$$v_{0x} = 250\text{m/s}$$

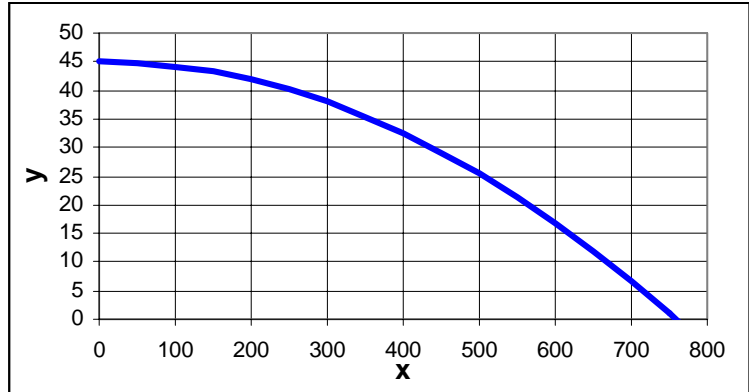
$$v_{0y} = 0$$

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

ou seja:

$$-h = -\frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3,03\text{s}$$



b) A que distância da arma, na horizontal, ele cai ao solo?

$$d = v_{0x}t = v_{0x}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 757,5\text{m}$$

c) Qual o módulo da componente vertical da velocidade, no instante em que atinge o solo?

$$v_y = v_{0y} - gt = -gt = -10 \cdot 3,03 = -30,3\text{m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 251,82\text{m/s}$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

30

Uma pedra é lançada para o alto de um penhasco de altura h , com uma velocidade inicial de 42m/s e um ângulo de 60° , acima da horizontal. A pedra cai $5,5\text{s}$ após o lançamento. Calcule:

a) Calcule a altura h do penhasco.

$$v_0 = 42\text{m/s}$$

$$\theta_0 = 60^\circ$$

$$t = 5,5\text{s}$$

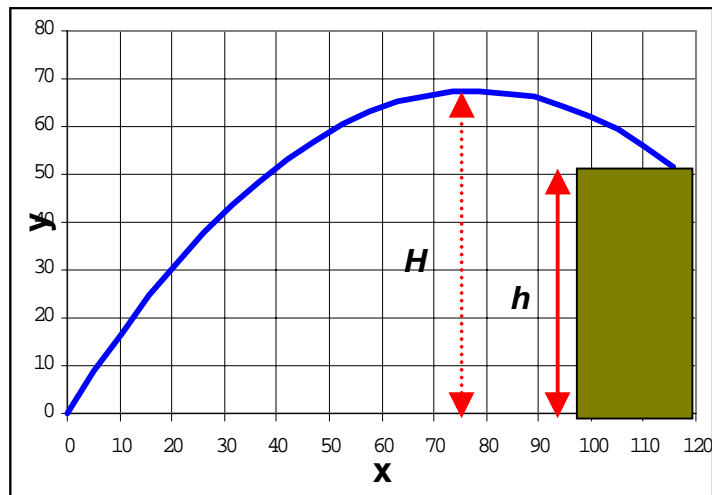
$$v_{0y} = v_0 \sin 60^\circ = 36,37\text{m/s}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos 60^\circ = 21\text{m/s}$$

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

ou seja:

$$h - 0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$



Usando os valores das variáveis, encontramos a altura do penhasco:

$$h = 51,81m$$

b) A velocidade da pedra imediatamente antes do impacto no penhasco.

$$v_y = v_{0y} - gt \quad \therefore \quad v_y = - 17,53m/s$$

$$v_x = v_{0x} = 21m/s$$

$$\vec{v} = (21\hat{i} - 17,53\hat{j})m/s$$

c) A altura máxima H acima do nível do solo.

Na posição da altura máxima a componente vertical da velocidade será nula:

$$v_{yH}^2 = v_{0y}^2 - 2gH = 0 \Rightarrow H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 67,48m$$

Poderíamos ainda calcular quanto tempo T foi necessário para o projétil chegar até a altura máxima e qual o valor da componente x_H :

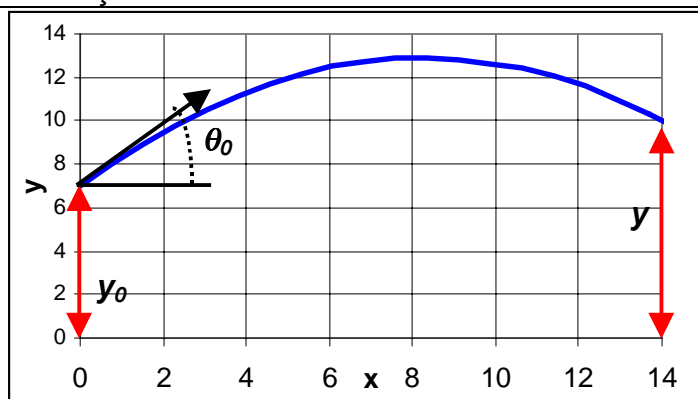
$$v_{Hy} = v_{0y} - gT = 0 \Rightarrow T = \frac{v_{0y}}{g} = 3,71s$$

$$x_H = v_{0x} T = 77,91m$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

41

Com que velocidade inicial um jogador de basquete deve lançar a bola, num ângulo de $\theta_0 = 55^\circ$ acima da horizontal, para fazer a cesta, conforme a figura ao lado?



$$\begin{aligned} \theta_0 &= 55^\circ \\ y_0 &= 7\text{pés} = 2,1m \\ y &= 10\text{pés} = 3m \\ x_0 &= 0 \\ x &= 14\text{pés} = 4,26m \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = v_{0x}t \\ y - y_0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \\ v_y = v_{0y} - gt \\ v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \end{cases}$$

Da primeira equação da esquerda encontramos que $t = x / v_{0x}$, e aplicamos esse resultado na segunda equação:

$$y - y_0 = v_{0y} \left(\frac{x}{v_{0x}} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 = x \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

ou seja:

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2 \cos^2 \theta_0 [x \tan \theta_0 - (y - y_0)]} = 52,17$$

$$v_0 = 7,22 \text{ m/s}$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

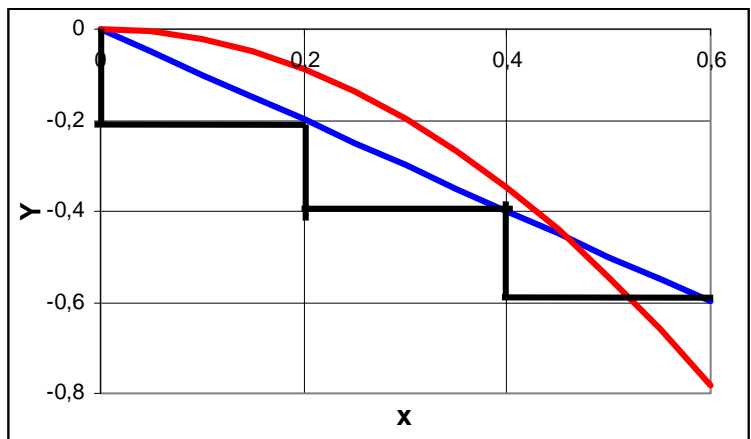
47 Uma bola rola, horizontalmente, do alto de uma escadaria com velocidade inicial de $1,5 \text{ m/s}$. Os degraus têm 20 cm de altura por 20 cm de largura. Em qual degrau a bola bate primeiro?

$$\begin{aligned} h = d &= 0,2 \text{ m} \\ v_{0x} &= 1,5 \text{ m/s} \\ \theta_0 &= 0^\circ \\ v_{0y} &= 0 \end{aligned}$$

$$y_{\text{reta}} = -x$$

$$y_{\text{bola}} = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2$$

$$y_{\text{bola}} = -\left(\frac{g}{2v_0^2} \right) x^2$$



Nós iremos determinar o degrau onde a bola vai bater primeiro, encontrando o ponto onde a reta cruza com a parábola, num ponto x_E , onde:

$$-x_E = -\left(\frac{g}{2v_0^2} \right) x_E^2 \quad \text{ou seja:} \quad x_E = \frac{2v_0^2}{g} = 0,45 \text{ m}$$

Essa distância x_E será equivalente ao n -ésimo degrau, onde:

$$\frac{2v_0^2}{g} = nh \quad \therefore \quad n = \frac{2v_0^2}{gh} = 2,29 \Rightarrow 3^\circ \text{ degrau}$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

49 Um avião mergulhando num ângulo de 53° com a vertical a uma altitude de $730m$ lança um projétil, que bate no solo $5s$ depois de ser lançado.

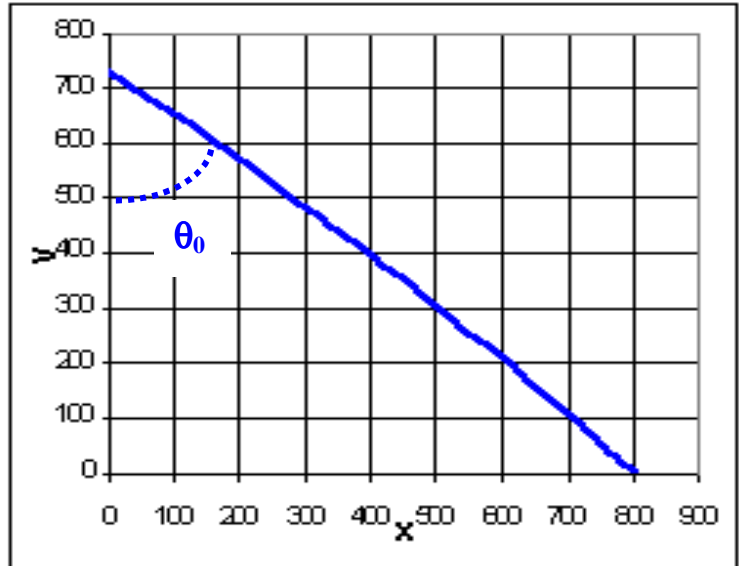
a) Qual a velocidade do avião?

$$v_{0y}t = \frac{gt^2}{2} - h = (-v_0 \cos \theta_0)t$$

$$v_0 = \frac{h - \frac{gt^2}{2}}{\cos \theta_0} = 201,88m/s$$

b) Que distância o projétil percorreu, horizontalmente, durante o seu vôo?

$$d = v_{0x}t = v_0 t \sin \theta_0 = 806,14$$



c) Quais eram as componentes horizontal e vertical de sua velocidade no instante em que caiu no solo?

$$v_x = v_{0x} = v_0 \sin \theta_0 = 161,22m/s$$

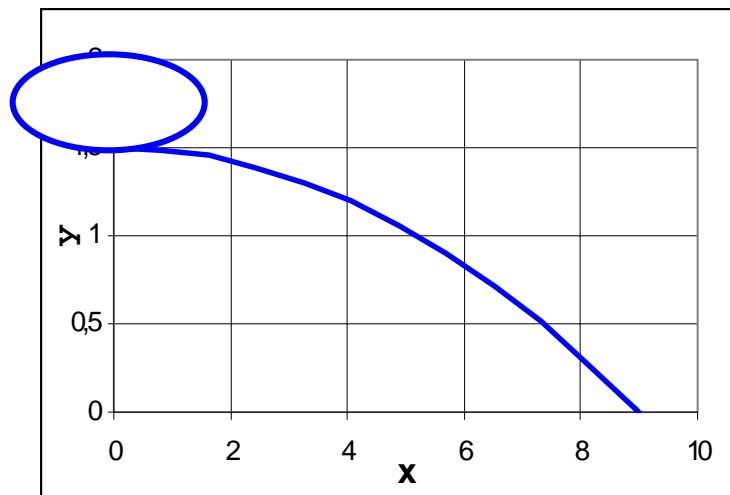
$$v_y = v_{0y} - gt = -v_0 \cos \theta_0 - gt = -121,49 - 49,00 = -170,49m/s$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

72 Uma pedra, presa a um cordão de $1,5m$ de comprimento, é girada por um menino, fazendo um círculo horizontal a $2m$ acima do solo. Quando o cordão arrebenta, a pedra é lançada horizontalmente, caindo ao solo $10m$ adiante. Qual era a aceleração centrípeta da pedra enquanto estava em movimento circular?

$$\begin{aligned} y_0 &= h = 1,5m \\ y &= 0 \\ r &= 1m \\ x_0 &= 0 \\ x &= d = 9m \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = v_{0x}t \\ y - y_0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \\ v_y = v_{0y} - gt \\ v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \end{cases}$$



Usando o conjunto de equações acima para esses problema, encontramos a velocidade de lançamento da pedra:

$$\begin{cases} d = v_{0x} t \\ h = \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{d}{v_{0x}} \quad \therefore v_{0x} = d \sqrt{\frac{g}{2h}} = 16,26 \text{ m/s}$$

Mas enquanto a pedra estava presa, ela descrevia um movimento circular e uniforme com aceleração dada por:

$$a = \frac{v_{0x}^2}{r} = \frac{gd^2}{2rh} = 264,38 \text{ m/s}^2 = 26,97g$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

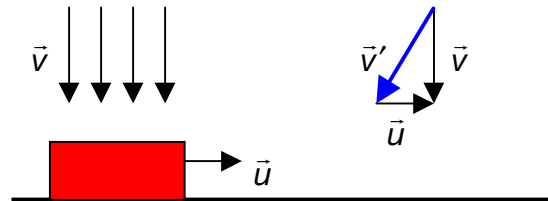
80

A neve cai, verticalmente, com uma velocidade constante de 8m/s . O motorista de um carro, viajando em linha reta numa estrada com uma velocidade de 50km/h , vê os flocos de neve caírem formando um ângulo com a vertical. Qual o valor deste ângulo?

$$v = 8 \text{ m/s}$$

$$u = 50 \text{ km/h} = 13,89 \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u} t \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \end{cases}$$



Onde \vec{v} é a velocidade da neve caindo observada em um referencial fixo na estrada, \vec{u} é a velocidade do referencial móvel em relação à estrada e \vec{v}' é a velocidade da neve caindo observada pelo referencial móvel. Em termos vetoriais, teremos:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

Como neste caso específico os vetores \vec{v} e \vec{u} formam um ângulo reto:

$$v' = \sqrt{v^2 + u^2} = 16,02 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{u}{v} = 1,73 \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 83 Um trem viaja em direção ao sul a 30m/s (em relação ao solo), sob uma chuva que está caindo, também em direção ao sul, sob a ação do vento. As trajetórias das gotas de chuva formam um ângulo de 22° com a vertical, conforme registrado por um observador parado no solo. Entretanto, um observador no trem vê as gotas caírem exatamente na vertical. Determine a velocidade da chuva em relação ao solo.

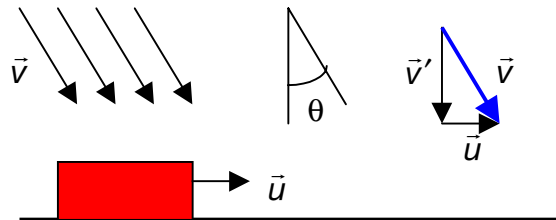
$$\theta = 22^\circ$$

$$u = 30\text{m/s}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

logo

$$u = v \sin \theta \quad \therefore \quad v = \frac{u}{\sin \theta} = 80,08\text{m/s}$$



Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

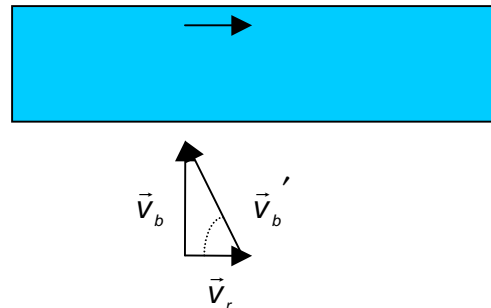
- 88 Uma mulher pode remar um bote a $6,4\text{km/h}$, em água parada.

- a) Se ela atravessar um rio com uma correnteza de $3,2\text{km/h}$, em que direção deve apurar o bote, para alcançar o local diretamente oposto ao seu ponto de partida?

$$v_b' = 6,4\text{km/h}$$

$$v_r = 3,2\text{km/h}$$

$$\cos \theta = \frac{v_r}{v_b} = \frac{3,2}{6,4} = 0,5 \quad \therefore \quad \theta = 60^\circ$$



- b) Se o rio tiver $6,4\text{km}$ de largura, quanto tempo levará para atravessá-lo?

$$l = 6,4\text{km}$$

$$v_b = v_b' \sin \theta$$

$$l = v_b t$$

$$t = \frac{l}{v_b} = \frac{l}{v_b' \sin \theta} = \frac{6,4}{6,4 \cdot \sin 60^\circ} = 1,15\text{h} = 1\text{h } 09\text{min}$$

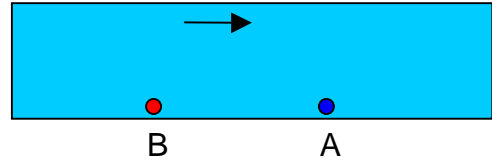
- c) Suponha que, em vez de atravessar o rio, ela reme $3,2\text{km}$ rio abaixo, e depois volte ao ponto de partida. Qual o tempo gasto nesse percurso?

$$d = 3,2\text{km}$$

As velocidades contra a correnteza V_{ab} e a favor da correnteza V_{ba} são definidas como:

$$V_{ab} = v_b' - v_r$$

$$V_{ba} = v_b' + v_r$$



Como os movimentos têm velocidades constantes:

$$d = V_{ab} t_{ab} \quad e \quad d = V_{ba} t_{ba} \quad \text{onde} \quad t = t_{ab} + t_{ba}$$

$$t = \frac{d}{V_{ab}} + \frac{d}{V_{ba}} = \frac{d(V_{ab} + V_{ba})}{V_{ab} V_{ba}} = \frac{2 v_b'^2 d}{v_b'^2 - v_r^2} = 1,34\text{h}$$

- d) Quanto tempo levaria se tivesse remado $3,2\text{km}$ rio acima e, depois, voltasse ao ponto de partida?

O mesmo do item anterior

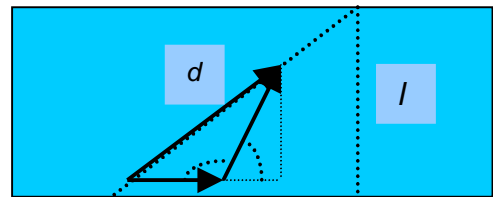
- e) Em que direção deveria apurar o barco, se quisesse atravessar o rio no mais curto intervalo de tempo possível? Qual seria esse tempo?

$$l = 6,4\text{km}$$

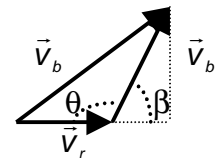
$$v_b' = 6,4\text{km/h}$$

$$v_r = 3,2\text{km/h}$$

$$d = v_b t$$



onde d é a distância a ser percorrida pelo barco na travessia do rio.



Por equivalência entre os triângulos, podemos mostrar que:

$$\frac{l}{v_b' \sin \beta} = \frac{d}{v_b} = t$$

Para calcular o extremo (mínimo, neste caso) do tempo em relação ao ângulo de inclinação do barco teremos:

$$\frac{dt}{d\beta} = -\frac{l \cos \beta}{v_b' \sin^2 \beta} = 0 \Rightarrow \beta_M = \frac{\pi}{2}$$