Versão preliminar
7 de setembro de 2002

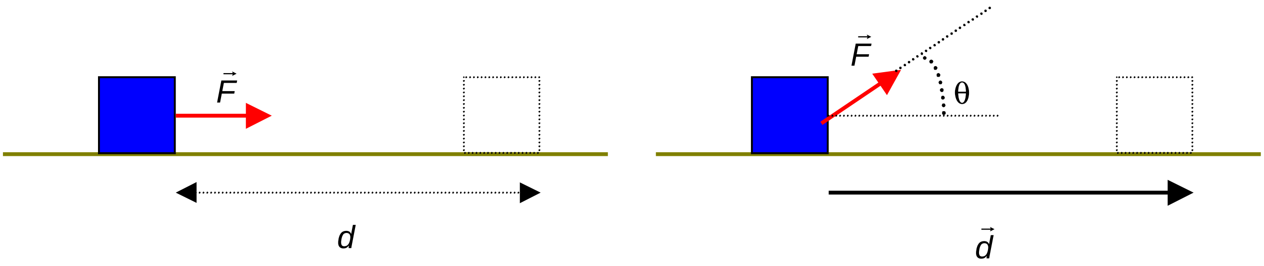
Notas de Aula de Física

07. Trabalho e energia cinética

Podemos definir trabalho como a capacidade de produzir energia. Se uma força executou um trabalho W sobre um corpo ele aumentou a energia desse corpo de W.

Esse definição, algumas vezes parece não estar de acordo com o nosso entendimento cotidiano de trabalho. No dia-a-dia consideramos trabalho tudo aquilo que nos provoca cansaço. Na Física se usa um conceito mais específico.

Movimento em uma dimensão com força constante



$$W = F\,d \qquad\qquad W = Fd\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

O trabalho realizado por uma força constante é definido como o produto do deslocamento sofrido pelo corpo, vezes a componente da força na direção desse deslocamento.

Se você carrega uma pilha de livros ao longo de uma caminho horizontal, a força que você exerce sobre os livros é perpendicular ao deslocamento, de modo que nenhum trabalho é realizado sobre os livros por essa força. Esse resultado é contraditório com as nossas definições cotidianas sobre força, trabalho e cansaço!

Trabalho executado por uma força variável

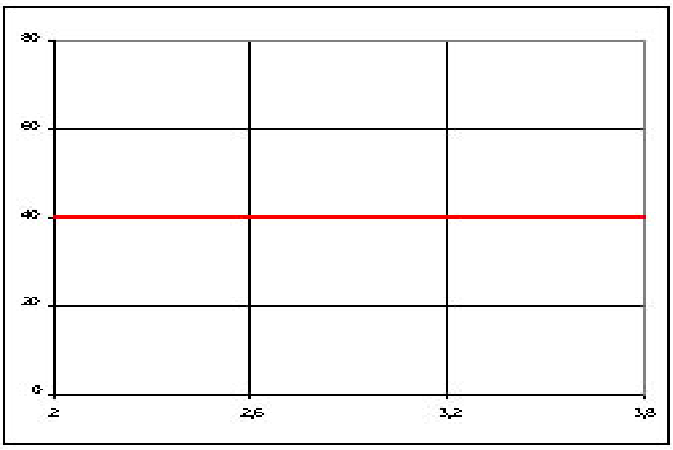
Para uma análise inicial, vamos considerar o gráfico do trabalho versus deslocamento para uma força constante que atua na direção do deslocamento.

Como foi definido anteriormente

$$W = F\,d$$

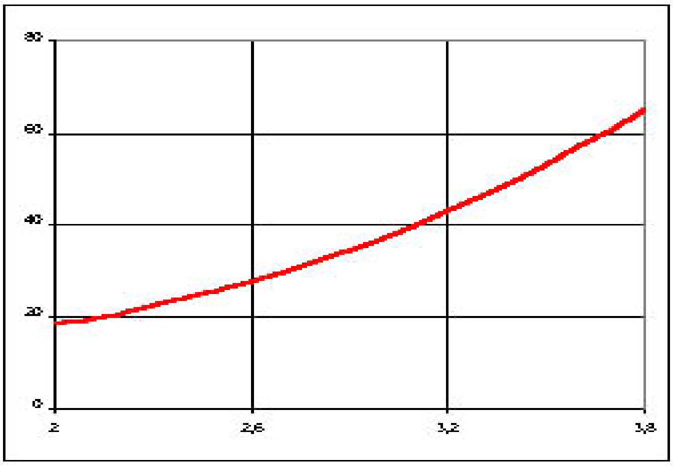
que é a área debaixo da curva, ou seja o retângulo compreendido entre as posições inicial e final vezes o valor da força aplicada. Ou seja:

$$W = 40 \;.\; (3{,}8 - 2) = 72 Joules$$



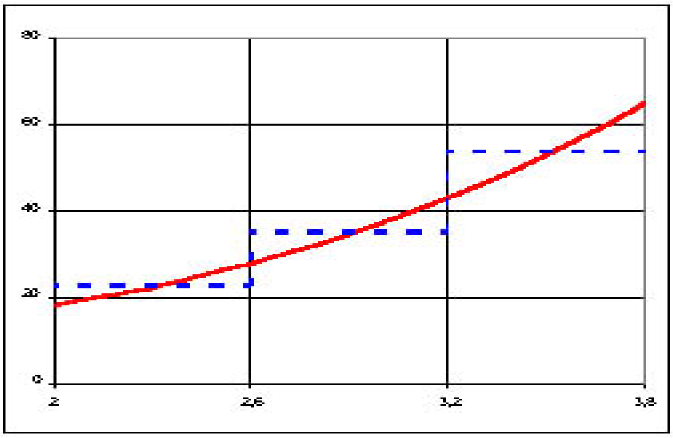
Análise unidimensional

Quando está atuando sobre um corpo uma força variável que atua na direção do deslocamento, o gráfico da intensidade da força versus o deslocamento tem uma forma como a da figura ao lado.



O trabalho executado por essa força é igual a área abaixo dessa curva. Mas como calcular essa área se a curva tem uma forma genérica, em princípio?

Uma primeira aproximação para o cálculo dessa área seria dividir a área a ser calculada em pequenos retângulos, como esses pontilhados da figura ao lado.



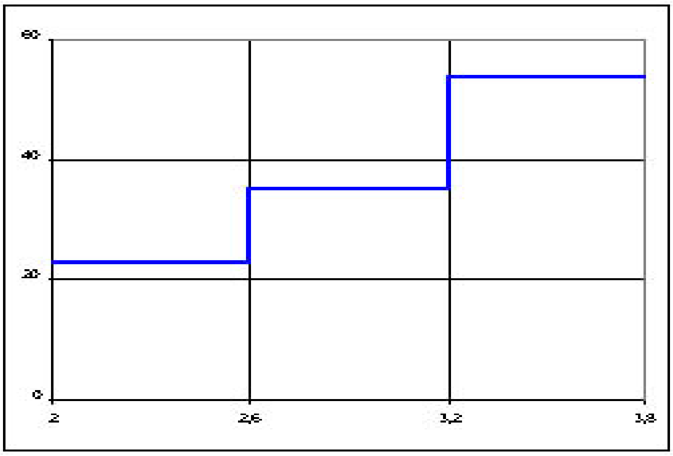
A área abaixo da curva contínua seria aproximada pelo retângulo definido pela reta pontilhada.

Se chamarmos o trabalho entre as posições *2* e *2,6* de δW_i , teremos como aproximação para esse trabalho o produto da força $F(x_i) = 22,7$ vezes o deslocamento $\delta x_i = 2,6 - 2,0 = 0,6$. Ou seja:

$$\delta W_i = F(x_i)\delta x_i$$

O trabalho total, ao longo de todo o percurso considerado será a soma dos trabalhos de cada pequeno percurso:

$$W = \sum_i \delta W_i = \sum_i F(x_i)\delta x_i$$



A aproximação da curva pelos retângulos vai ficar tanto mais próxima do real quanto mais subdivisões considerarmos. E no limite em que δx_i for muito pequeno a aproximação será uma igualdade. Ou seja:

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F(x_i)\delta x_i$$

A equação anterior é a própria definição de integral, e desse modo o trabalho executado por uma força variável entre uma posição inicial ***i*** e uma posição final ***f*** será:

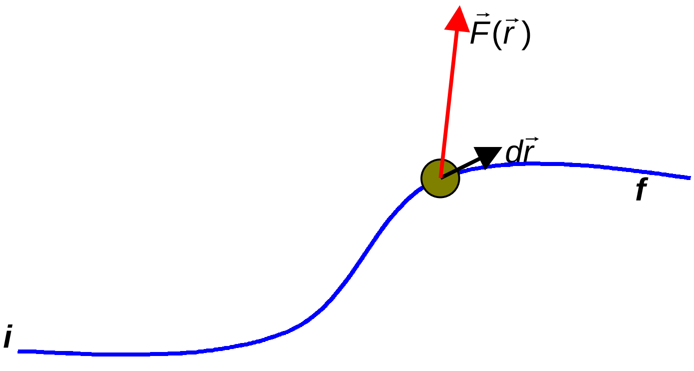
$$W = \int_i^f F(x)dx$$

Análise tridimensional

Vamos considerar uma força $\vec{F}(\vec{r})$ que atua em um corpo de massa m, ao longo de uma trajetória que vai do ponto inicial ***i*** até o ponto final ***f***, ao longo de uma curva ***C***

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

onde a integração é considerada ao longo da trajetória usada pelo corpo.



De modo geral a força é considerada como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \hat{i}\,F_x(x,y,z) + \hat{j}\,F_y(x,y,z) + \hat{k}\,F_z(x,y,z)$$

e

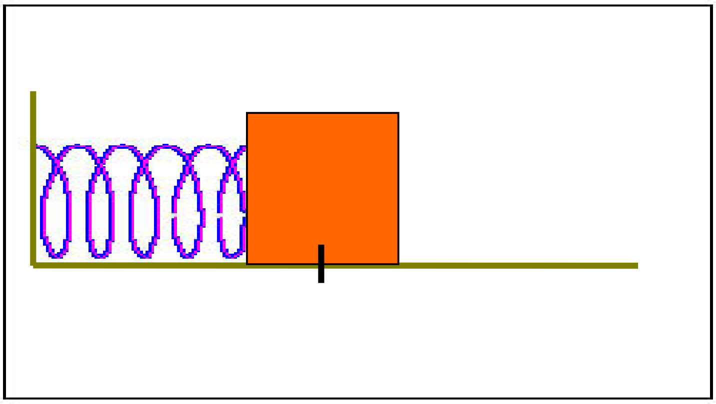
$$d\vec{r} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz$$

$$W_{if} = \int_i^f \left[F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz\right]$$

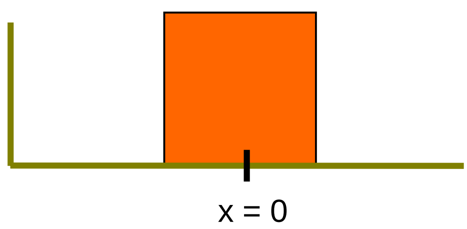
onde a integração é feita ao longo da curva ***C*** que define a trajetória do corpo.

Trabalho realizado por uma mola

Vamos analisar o movimento de um sistema composto por um bloco de massa m que está sobre uma superfície horizontal sem atrito, e tem preso a si uma mola. A outra extremidade da mola está fixa. Quando a mola está num estado relaxado ela não está distendida ou comprimida. Nessa situação ela não exerce força alguma no bloco.



Mola relaxada

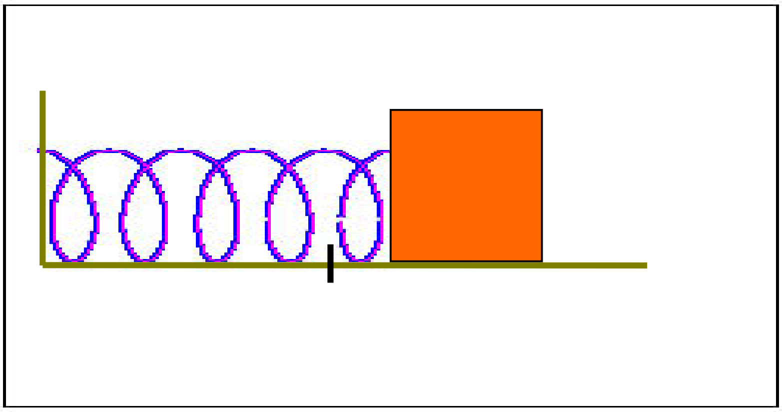


Quando o bloco se desloca da posição relaxada ou de equilíbrio a mola exerce sobre ele uma força restauradora que para que ele retorne à posição de equilíbrio original. Quando o deslocamento é na parte positiva do eixo x a força restauradora aponta para o sentido negativo desse eixo, e quando o deslocamento se dá na parte negativa do eixo x a força restauradora aponta para o sentido positivo desse eixo.

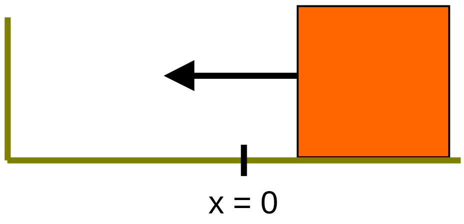
Quando o deslocamento do bloco é muito pequeno em comparação à dimensão da mola podemos considerar o que é chamado de pequenas oscilações, e neste caso podemos dizer que a força restauradora é proporcional ao deslocamento do bloco em relação à sua posição de equilíbrio. essa aproximação é também conhecida como Lei de Hooke, e pode ser expressa do seguinte modo:

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}$$

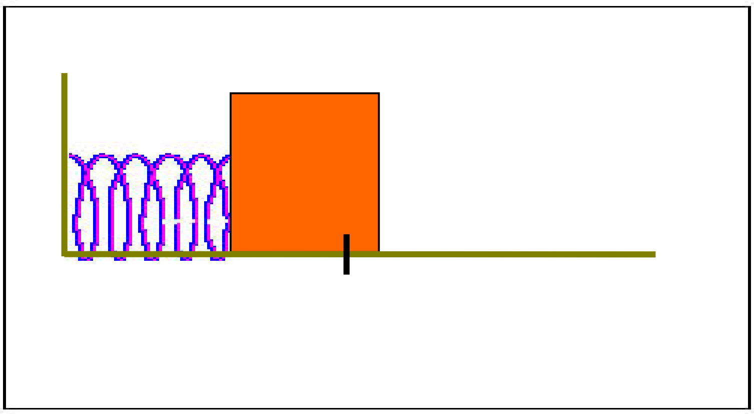
onde chamamos k de constante elástica da mola.



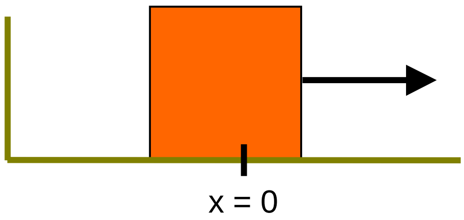
Mola distendida



Se o bloco se deslocou na parte positiva do eixo x , temos que $\vec{r} = \hat{i}\,|x|$ e portanto a força aponta para o sentido negativo do eixo: $\vec{F} = -k\,|x|\,\hat{i}$



Mola comprimida



Se o bloco se deslocou na parte negativa do eixo x , temos que $\vec{r} = -\hat{i}\,|x|$ e portanto a força aponta para o sentido positivo do eixo: $\vec{F} = k\,|x|\,\hat{i}$.

O trabalho realizado pela mola para levar o corpo de uma posição inicial até uma posição final será:

$$W_{if} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f \left(-k\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}$$

Como o deslocamento se dá no eixo x , temos que:

$$\begin{cases} \vec{r} = \hat{i}x \\ d\vec{r} = \hat{i}dx \end{cases} \quad \therefore \quad \vec{r}\cdot d\vec{r} = x\,dx$$

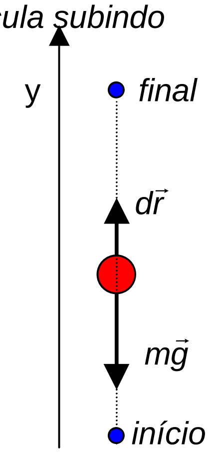
logo, o trabalho realizado pela mola será

$$W_{if} = -k\int_i^f x\,dx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_i}^{x_f} = -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Uma partícula em queda livre

Quando uma partícula se movimenta sob a ação da gravidade, esta é a única força que nela atua.

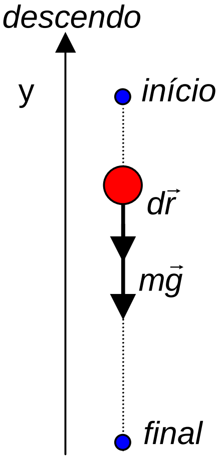
Quando a ***partícula estiver subindo***, o deslocamento elementar $d\vec{r}$ e a força peso têm sentidos contrários, logo o trabalho executado pela força peso entre as posições inicial e final será:



$$W_{if} = \int_i^f\left(-mg\,\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{j}\,dy\right) = -mg\int_i^f dy$$

$$W_{if} = -\,mg\,(\,y_f - y_i\,)$$

Quando a ***partícula estiver descendo***, o deslocamento elementar $d\vec{r}$ e a força peso têm mesmo sentido, logo o trabalho executado pela força peso entre as posições inicial e final será:



$$W_{if} = \int_i^f\left(mg\,\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{j}\,dy\right) = mg\int_i^f dy$$

$$W_{if} = mg\,(\,y_f - y_i\,)$$

Quando a partícula está subindo a força peso executa uma trabalho negativo, e como conseqüência diminui a energia cinética da partícula. Por outro lado, quando a partícula está descendo a força peso executa uma trabalho positivo, e como conseqüência aumenta a energia cinética da partícula.

Energia cinética

Define-se a energia cinética de uma partícula de massa m que viaja com velocidade v, como:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Mostraremos adiante que o trabalho realizado pela resultante de forças que atua em uma corpo é igual à variação da sua energia cinética, ou seja:

$$W_{if} = \Delta K = K_f - K_i$$

Teorema do trabalho - energia cinética

Considere uma partícula de massa m que se move sob a ação de uma resultante de forças F. O trabalho W realizado por esta força dobre a partícula será:

$$W = \int_i^f F(x)dx = \int_i^f (ma)dx$$

mas, por outro lado

$$(ma)dx = \left(m\frac{dv}{dt}\right)dx = \left(m\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}dt\right) = \left(m\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}dt\right) = (mv)(dv)$$

ou seja:

$$W = \int_i^f mvdv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_i^f = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Considerando que

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

temos

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Potência

A potência mede a capacidade de um sistema produzir (ou absorver) energia. Ela é a razão entre a energia produzida (ou absorvida) e o intervalo de tempo necessário para essa produção (ou absorção).

Dependendo do nosso interesse ou dos nossos instrumentos podemos desejar medir a potência média ou potência instantânea.

Potência média

Nos dá a medida da energia produzida (ou absorvida) W num certo intervalo de tempo t.

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

Potência instantânea

Nos dá a medida da energia produzida (ou absorvida) num intervalo de tempo muito pequeno, daí instantânea. É útil quando queremos acompanhar a produção (ou absorção) de energia de maneira precisa.

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

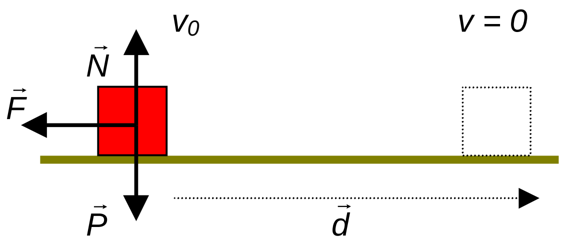
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \therefore \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
04	Um objeto de *102kg* está inicialmente movendo-se em linha reta com uma velocidade de *53m/s* . Se ele sofre uma desaceleração de $2m/s^2$ até ficar imóvel:

a) Qual a intensidade da força utilizada?

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$



Decompondo as forças segundo eixos cartesianos, encontramos:

$$\begin{cases} F = ma \\ N - P = 0 \end{cases}$$

Logo:

$$F = ma = 204N$$

b) Qual a distância que o objeto percorreu antes de parar?

$$v^2 = v_0^2 - 2ad \quad \therefore \quad d = \frac{v_0^2}{2a} = 702{,}25m$$

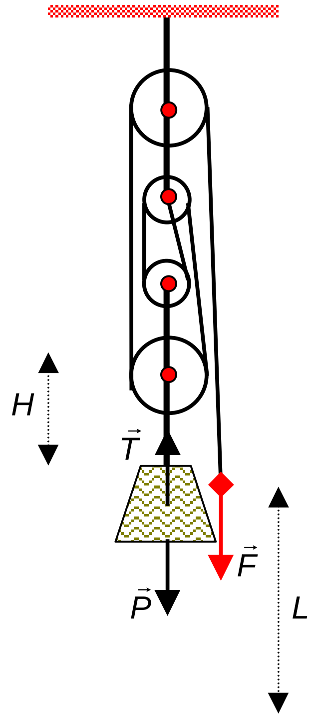
c) Qual o trabalho realizado pela força de desaceleração?

Podemos calcular o trabalho de duas maneiras equivalentes:

$$\left.\begin{matrix} W = \vec{F} \cdot \vec{d} = -Fd \\ W = \Delta K = -\dfrac{1}{2} m v_0^2 \end{matrix}\right\} \quad \therefore \quad W = -\ 143.259 Joules$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

09 A figura ao lado mostra um conjunto de polias usado para facilitar o levantamento de um peso ***P***. Suponha que o atrito seja desprezível e que as duas polias de baixo, às quais está presa a carga, pesem juntas *20N*. Uma carga de *840N* deve ser levantada *12m*.



a) Qual a força mínima $\vec{F}$ necessária para levantar a carga?

Ao puxar a corda exercendo a força $\vec{N}$, executaremos um certo trabalho W. Ao elevar o peso P, o conjunto de roldanas executará, também, um certo trabalho. Esses dois trabalhos serão iguais, pois a energia em questão é aquela que fornecemos ao atuar com a força $\vec{F}$. A força mínima que o conjunto de roldanas deve fazer atuar sobre o corpo para elevá-lo com velocidade constante de uma altura H é igual ao peso do corpo, logo:

$$W = P\,H$$

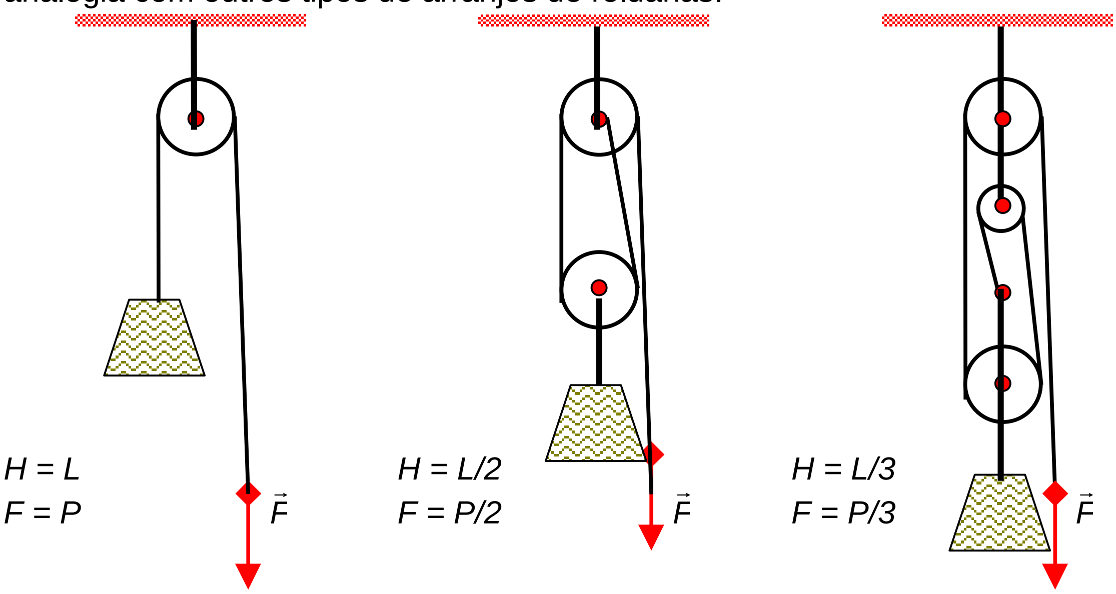
Para elevar o corpo de uma altura H,
deveremos puxar a corda (com $\vec{F}$) de um comprimento L, logo:

$$W = F\,L$$

e como esses trabalhos são iguais:

$$W = PH = FL \quad \therefore \quad F = \frac{H}{L}P$$

Para descobrir qual a relação entre H e L deste problema, vamos fazer uma analogia com outros tipos de arranjos de roldanas.



No arranjo mais simples, o da esquerda da figura anterior, temos *1 corda* e um tirante. No arranjo seguinte temos *2 cordas* e um tirante e no terceiro arranjo temos *3 cordas* e um tirante.
No nosso problema temos *4 cordas* e um tirante, logo:

$$H = L/4$$
$$F = P/4 = (840 + 20)/4 = 215N$$

b) Qual o trabalho executado para levantar a carga até a altura de $H = 12m$?

$$W = P\ H = (840 + 20)\ 12 = 10.320 Joule$$

c) Qual o deslocamento da extremidade livre da corda?

$$L = 4H = 48m$$

d) Qual o trabalho executado pela força $\vec{F}$ para realizar esta tarefa?

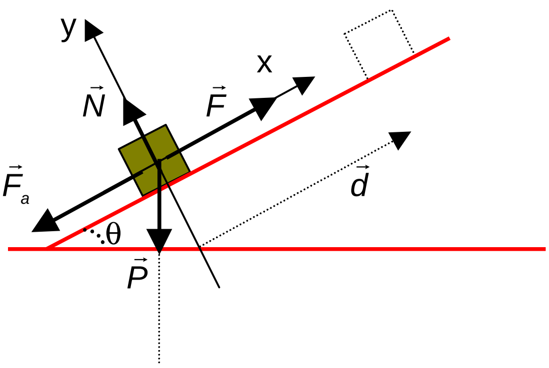
$$W = F\ L = 10.320 Joules$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
11	Uma arca de $50kg$ é empurrada por uma distância de $6m$, com velocidade constante, numa rampa com inclinação de 30^0 por uma força horizontal constante. O coeficiente de atrito cinético entre a arca e a rampa é $0,20$.

a) Calcule o trabalho realizado pela força aplicada.

Como a arca se move com velocidade constante, a aceleração é nulo e portanto:

$$\vec{F}_a + \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} = 0$$



Decompondo as forças, encontramos:

$$\begin{cases} N - P\cos\theta = 0 \\ F - P\,\text{sen}\theta - F_a = 0 \end{cases}$$

Mas $F_a = \mu_C N$, logo

$$F = F_a - P\ sen\theta = \mu_C N + P\ sen\theta$$

$$F = P\ (sen\theta + \mu_C \cos\theta\ )$$

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\,d = 1.979,22 Joule$$

b) Calcule o trabalho realizado pelo peso da arca.

$$W_P = \vec{P}\cdot\vec{d} = -\,P\,d\,sen\theta = -\,1.470 Joules$$

c) Calcule o trabalho realizado pela força de atrito.

$$W_a = \vec{F}_a\cdot\vec{d} = -\,F_a\,d = \mu_C\,N\,d = \mu_C\,P\,d\,cos\theta = -509,22$$

É fácil perceber que é nulo o trabalho executado pela resultante de forças. Podemos mostrar isso de diversas maneiras:

$$W_R = \left(\vec{F}+\vec{P}+\vec{F}_a+\vec{N}\right)\cdot\vec{d} = W_F + W_P + W_a + W_N = 0$$

O trabalho executado pela normal é nulo pois ela é perpendicular ao vetor deslocamento.

$$W_R = \Delta K = 0$$

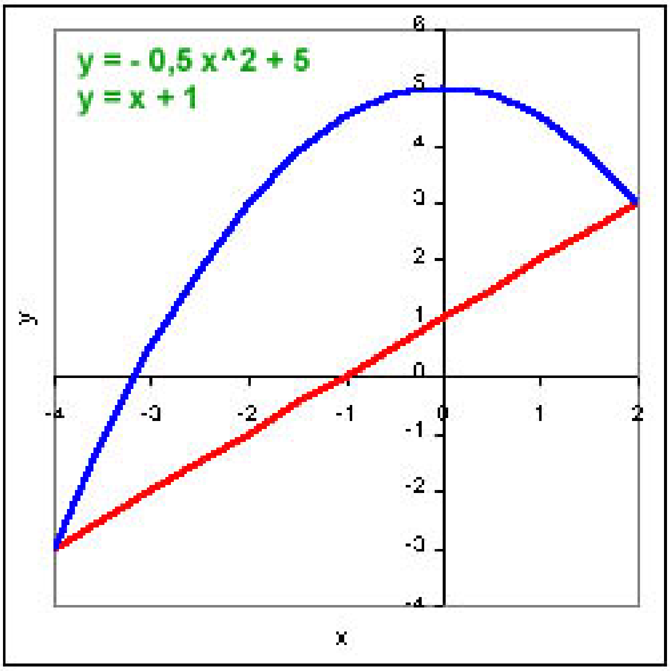
Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
17	Qual o trabalho realizado por uma força $\vec{F} = 2x\,\hat{i} + 3\,\hat{j}$ (em Newtons), onde x está em metros, que é exercida sobre uma partícula enquanto ela se move da posição inicial $\vec{r}_i = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ (em metros) até a posição final $\vec{r}_f = -4\hat{i} - 3\hat{j}$ (em metros) ?

$r_i = (\,2,\,3\,)$
$r_f = (\,-4\,,\,-3\,)$

Como não foi mencionada a trajetória, podemos escolher diversos percursos para a partícula entre os pontos inicial e final.
Vamos calcular o trabalho usando duas trajetórias: a reta que une os dois pontos e uma parábola que passa por eles.
Como já foi dito anteriormente:

$$W_{if} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W_{if} = \int_i^f \left[F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy\right]$$



a) Vamos considerar inicialmente a trajetória retilínea *y(x) = x + 1*

A imposição da trajetória no cálculo da integral acontece quando usamos na força e nas diferenciais a dependência *y(x)* definida pela trajetória.

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x(x,y(x))dx + F_y(x,y(x))\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$$

Teremos desse modo, todo o integrando como função de x .

Neste problema:

$$\vec{F} = 2x\,\hat{i} + 3\,\hat{j} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

logo

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = 2x\,dx + 3\,dx = (2x+3)dx$$

$$W_{if} = \int_{+2}^{-4}(2x+3)dx = x^2\Big|_{+2}^{-4} + 3x\Big|_{+2}^{-4} = (16-4) + 3(-4-2) = 12 - 18 = -6J$$

b) Vamos considerar inicialmente a trajetória parabólica $y = -x^2/2 + 5$.

Neste problema:

$$\vec{F} = 2x\,\hat{i} + 3\,\hat{j} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = -x$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = 2x\,dx + 3(-x)dx = -x\,dx$$

$$W_{if} = \int_{+2}^{-4} - x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Bigg|_{+2}^{-4} = -\frac{1}{2}(16-4) = -6J$$

Não foi por acaso que o resultado do trabalho executado entre dois pontos, por essa força, não dependeu da trajetória. Existe uma categoria de forças - chamadas forças conservativas - para as quais o trabalho entre dois pontos só depende desses pontos. De modo geral, uma força $\vec{F}(\vec{r},t)$ é conservativa quando o seu rotacional é nulo, ou seja:

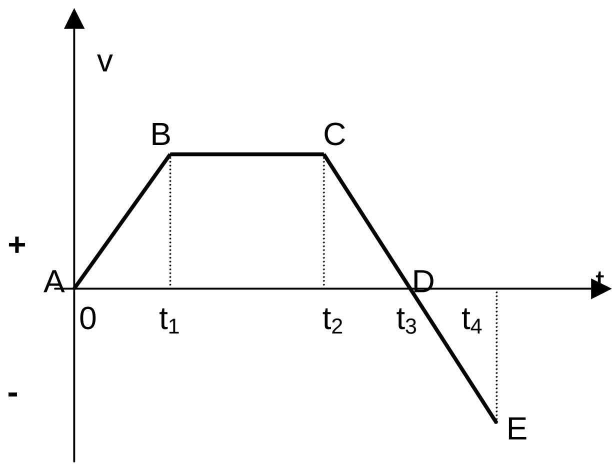
$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
26	Uma força única age sobre um corpo que está se movendo em linha reta. A figura a seguir mostra o gráfico da velocidade em função do tempo para esse corpo. Determine o sinal (positivo ou negativo) do trabalho realizado pela força sobre o corpo nos intervalos AB , BC, CD e DE

AB Neste intervalo a curva é uma reta, que passa pela origem, e portanto a velocidade é uma função crescente do tempo até atingir um certo valor $\mathbf{v_0}$, e tem a forma:

$$v = a_1\,t$$

O movimento é unidimensional e a velocidade é crescente, logo a força atua na direção do deslocamento e desse modo:



$$W_{AB} = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd > 0$$

BC Neste intervalo a velocidade é constante $\mathbf{v_0}$, logo a aceleração é nula e portanto a força resultante também é nula. Consequentemente o trabalho da força resultante será nulo:

$$W_{BC} = 0$$

CD Neste intervalo a velocidade é decrescente, iniciando o intervalo com valor $\mathbf{v_0}$ e terminando com velocidade nula. A forma funcional é do tipo:

$$v = v_0 - a_2 (t - t_2)$$

onde $a_2 > 0$. O movimento é unidimensional e a velocidade é decrescente, logo a força atua na direção contrária ao deslocamento e desse modo:

$$W_{CD} = \vec{F} \cdot \vec{d} = -Fd < 0$$

DE Neste intervalo o corpo começa a recuar, com a mesma aceleração a_2 do intervalo anterior.

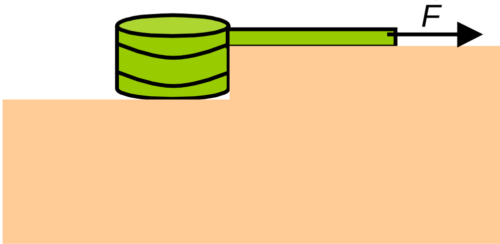
$$v = - a_2 (t - t_3)$$

O módulo da velocidade aumenta e ela assume valores negativos cada vez maiores.
Ao contrário do item anterior, o corpo está sendo acelerado e temos força e deslocamento no mesmo sentido.

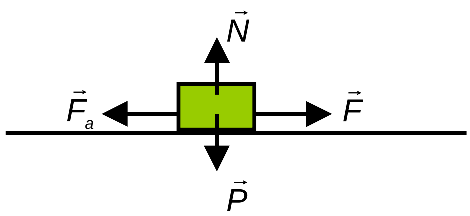
$$W_{DE} = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd > 0$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
27	Uma mangueira de incêndio é desenrolada puxando-se horizontalmente uma de suas extremidades ao longo de uma superfície sem atrito com velocidade constante de *2,3m/s* . A massa de *1m* de mangueira é *0,25kg* .Qual a energia cinética fornecida para desenrolar *12m* de mangueira?

A força $\vec{F}$ é uma força variável porque à medida que a mangueira é desenrolada uma maior parte dela passa a se movimentar em contato com o solo e atritando-se com ele. Como o atrito vai aumentado a força externa deve aumentar para que a mangueira desenrolada tenha velocidade constante.



$$\vec{F} + \vec{F}_a + \vec{N} + \vec{P} = 0$$



$$\begin{Bmatrix} N - P = 0 \\ \\ F - F_a = 0 \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad F = F_a = \mu_C N = \mu_C P$$

onde P é a parte da mangueira que está em movimento. A densidade linear de massa λ da mangueira é passível de ser calculada:

$$\lambda = \frac{M}{L} = 0{,}25kg/m$$

Quando a mangueira tiver um comprimento x desenrolado e em movimento, o peso dessa parte será $P(x)$ onde:

$$P(x) = \lambda\, g\, x$$

Então:

$$F(x) = \mu_C\, \lambda\, g\, x$$

O trabalho será:

$$W = \int_o^L F(x)dx = \mu_C \lambda g \int_o^L x\, dx = \mu_C \lambda g \frac{L^2}{2}$$

Apesar do enunciado ter induzido uma solução nessa direção, não se pode resolver desse modo pois não se conhece o coeficiente de atrito μ_C entre a mangueira e o piso.

No entanto a solução é muito mais simples! E noutra direção, já que não se pediu o trabalho para vencer o atrito enquanto se desenrola, mas para se vencer a inércia.

O trabalho da força resultante é igual à variação da energia cinética. Existe uma força, e não é essa força $\vec{F}$ mencionada, responsável por tirar do repouso, aos poucos - infinitesimalmente, cada parte da mangueira. Ela atua por um instante! O trabalho que ela produz é aquele necessário para colocar *TODA* a mangueira em movimento de velocidade constante.

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(\lambda L)v^2 = 7{,}935 Joules$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
32	Um homem que está apostando corrida com o filho, tem a metade da energia cinética do garoto, que tem a metade da massa do pai. Esse homem aumenta a sua velocidade em 1m/s e passa a ter a mesma energia cinética da criança. Quais eram as velocidades originais do pai e do filho?

Vamos equacionar as várias informações fornecidas:

i. $$K_H = \frac{1}{2}K_G \quad \therefore \quad \left(\frac{1}{2}M_H V_H^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_G V_G^2\right)$$

ii. $$\frac{M_H}{2} = M_G \quad \therefore \quad M_H = 2M_G$$

iii. $$\frac{1}{2}M_H (V_H + 1)^2 = \frac{1}{2}M_G V_G^2$$

Usando i. e ii. encontramos:

$$\frac{1}{2}(2M_G)V_H^2 = \frac{1}{4}M_G V_G^2 \quad \Rightarrow \quad V_H^2 = \frac{V_G^2}{4} \quad \therefore \quad V_G = 2V_H$$

Usando ii. e iii. encontramos:

$$\frac{1}{2}(2M_G)(V_H + 1)^2 = \frac{1}{2}M_G V_G^2 \quad \Rightarrow \quad (V_H + 1)^2 = \frac{V_G^2}{2}$$

Usando os dois últimos resultados, encontramos:

$$(V_H + 1)^2 = \frac{(2V_H)^2}{2} = 2V_H^2 \quad \therefore \quad V_H = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

e finalmente:

$$V_H = 2{,}41m/s \quad \text{e} \quad V_G = 4{,}82m/s$$

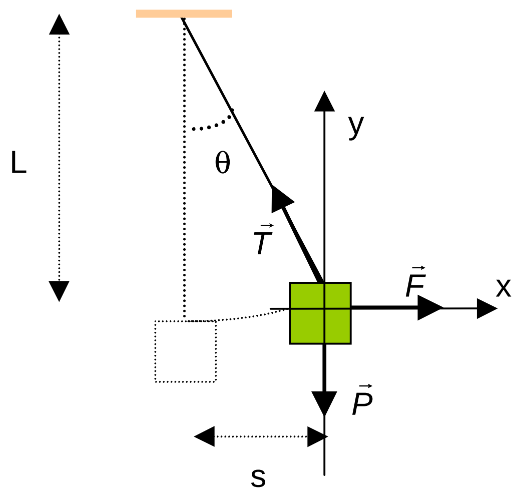
Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

37 Um caixote com uma massa de *230kg* está pendurado na extremidade de uma corda de *12m* de comprimento. Ele é empurrado com uma força horizontal variável $\vec{F}$, até deslocá-lo de *4m* horizontalmente.

a) Qual o módulo de $\vec{F}$ quando o caixote se encontra na posição final?

Vamos considerar que o caixote é deslocado com velocidade constante. Nada foi mencionado à respeito, então escolheremos a situação mais simples, pois nesse caso a aceleração será nula. Sendo assim, a segunda Lei de Newton terá a forma:

$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = 0$$



Decompondo essas forças, encontramos:

$$\begin{cases} F - T\,\text{sen}\,\theta = 0 \\ T\cos\theta - P = 0 \end{cases}$$

$$\frac{T\,\text{sen}\,\theta}{T\cos\theta} = \frac{F}{P} = \tan\theta \quad \therefore \quad F = P\tan\theta$$

Mas

$$\tan\theta = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{L^2 - s^2}} \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{s}{\sqrt{L^2 - s^2}}\right)P = 796{,}90N$$

b) Qual o trabalho total executado sobre o caixote?

Como a resultante de forças é nula, o trabalho executado por essa força é nulo.

c) Qual o trabalho executado pela corda sobre o caixote?

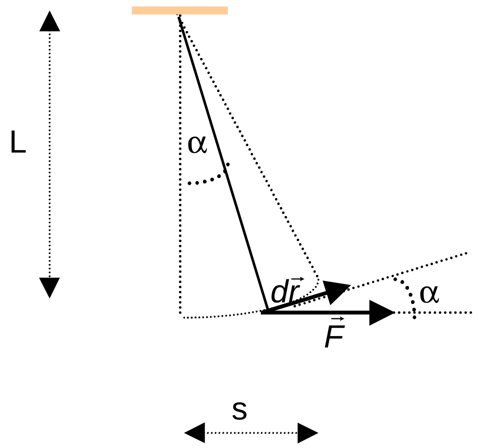
O trabalho elementar executado pela força $\vec{F}$ é dado por:

$$dW_F = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\alpha$$

Mas já foi mostrado que

$$F = P\tan\alpha$$

e podemos observar que



$$dr = L\,d\alpha$$

logo

$$dW_F = (P\tan\alpha)(L\,d\alpha)\cos\alpha$$

$$dW_F = L\,P\,\text{sen}\alpha\,d\alpha$$

$$W_F = \int_i^f dW_F = \int_0^\theta L\,P\,\text{sen}\alpha\,d\alpha$$

$$W_F = -L\,P\cos\alpha\Big|_0^\theta = L\,P(1-\cos\theta)$$

Se considerarmos H como a altura que o caixote foi elevado:

$$H = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$$

e então

$$W_F = P\,H = m\,g\,H$$

Mas como

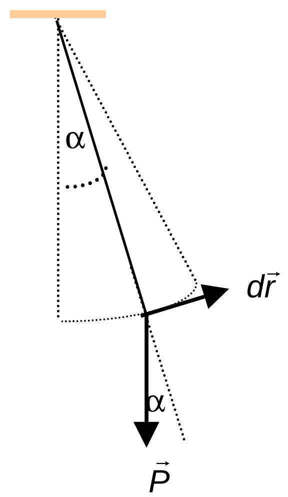
$$H = L(1-\cos\theta) = L\left(1-\frac{\sqrt{L^2-s^2}}{L}\right) = L-\sqrt{L^2-s^2} = 0{,}686m$$

temos

$$W_F = m\,g\,H = 1.546{,}90 Joules$$

d) Qual o trabalho executado pelo peso do caixote?

O trabalho elementar executado pela força $\vec{P}$ é dado por:



$$dW_P = \vec{P} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos(\alpha + 90^0)$$

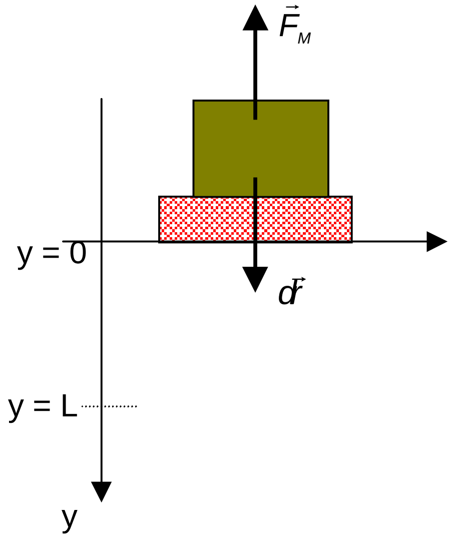
$$dW_P = -P\,\text{sen}\alpha\,dr = -PL\,\text{sen}\alpha\,d\alpha$$

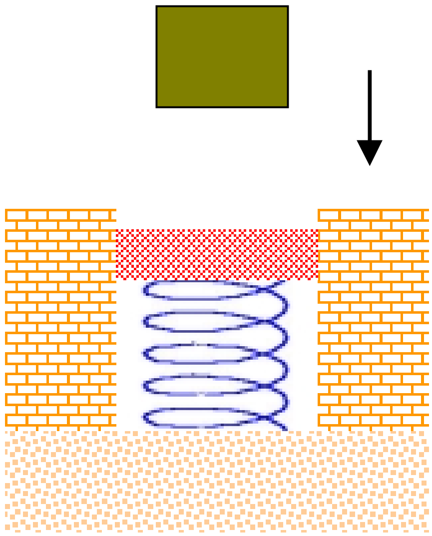
$$W_P = \int_i^f dW_P = -LP\int_0^\theta \text{sen}\alpha\,d\alpha = -W_F$$

$$W_P = -\,m\,g\,H = -\,1.546{,}90 Joules$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
38	Um bloco de *250g* é deixado cair sobre uma mola vertical com uma constante de mola k = *2,5N/cm* . A compressão máxima da mola produzida pelo bloco é de 12cm.

a) Enquanto a mola está sendo comprimida, qual o trabalho executado pela mola?





m = 250g = 0,25kg
k = 2,5N/cm = 250N/m
L = 12cm = 0,12m

O trabalho é definido como:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

O elemento de integração $d\vec{r}$ tem comprimento infinitesimal e aponta na direção de integração, portanto neste caso teremos $d\vec{r} = \hat{j}\,dy$. Como foi definido anteriormente, a força que a mola exerce no objeto é dada pela Lei de Hooke:

$$\vec{F}_M = -k\,y\,\hat{j}$$

e o trabalho executado por essa força será:

$$W_M = \int_i^f dW = \int_0^L \left(-k\,y\,\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{j}\,dy\right) = -k\int_0^L y\,dy = -\frac{1}{2}kL^2 = -\,1{,}8J$$

b) Enquanto a mola está sendo comprimida, qual o trabalho executado pelo peso do bloco?

$$\vec{P} = m\vec{g} = \hat{j}\,m\,g$$

$$W_P = \int_i^f dW = \int_0^L \left(\hat{j}\,m\,g\right)\cdot\left(\hat{j}\,dy\right) = mg\int_0^L dy = mgL = +\,0{,}294J$$

c) Qual era a velocidade do bloco quando se chocou com a mola?

O trabalho executado pela força resultante é igual a variação da energia cinética. A força resultante é:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_M + \vec{P}$$

e o trabalho executado por essa força será:

$$W_R = \int_i^f \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \int_i^f \left(\vec{F}_M + \vec{P}\right) \cdot d\vec{r} = \int_i^f \vec{F}_M \cdot d\vec{r} + \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{r} = W_M + W_P = \Delta K$$

$$\Delta K = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}mv^2 = W_R \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{-2W_R}{m}} = 3{,}47m/s$$

d) Se a velocidade no momento do impacto for multiplicada por dois, qual será a compressão máxima da mola? Suponha que o atrito é desprezível.

Vamos considerar que nessa nova situação a mola se comprimirá de H . Refazendo o raciocínio anterior, temos:

$$W_R' = -\frac{1}{2}kH^2 + mgH = \Delta K' = -\frac{1}{2}m(2v)^2 = -2mv^2$$

$$-\frac{1}{2}kH^2 + mgH + 2mv^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H^2 - \left(\frac{2mg}{k}\right)H - \left(\frac{4mv^2}{k}\right) = 0$$

A única solução positiva dessa equação é:

$$H = 0{,}23m$$