*Versão preliminar*
*10 de setembro de 2002*

# *Notas de Aula de Física*

## 08. Conservação da energia

*Quando exigimos das pessoas que moram em nossa casa que apaguem a luz ao sair de um aposento, não deixem a televisão ligada à noite enquanto dormem, fechem bem a torneira para que não fique pingando, ou, ainda, abaixem a chama do gás quando a água ferveu, estamos demonstrando preocupação com o desperdício! Desperdício significa que algo útil foi jogado fora sem ter sido aproveitado - foi desperdiçado.*

*A água da torneira que pinga vai embora pelo ralo e a gente nem percebe. E uma água nova entra na caixa d'água, em substituição àquela que foi desperdiçada! Agora pare e pense em quantas vezes você já ouviu alguém dizendo esta frase, bastante conhecida: "Nada se perde, tudo se transforma." Essa frase é de Lavoisier, um famoso cientista francês do século 18. Podemos entender esta frase, por exemplo, quando colocamos água numa panela e a aquecemos, podemos ver que a água vai evaporando e o seu nível na panela vai diminuindo. Isso não significa que a água é perdida mas que está se transformando em vapor d'água!*

*E a água que escorre pelo ralo, também se transforma? Podemos pensar em termos de utilidade, isto é, a água que estava na caixa-d'água era útil, mas, depois que se foi pelo ralo, perdeu sua utilidade. Se quisermos utilizar novamente a água que se foi, teremos que pagar à companhia de água e esgoto, para que trate mais água e que esta seja enviada pelo encanamento até a nossa caixa-d'água! Ou seja, haverá um custo na reutilização da água que já foi utilizada.*

*No nosso dia-a-dia, usamos muito a expressão "desperdício de energia", que se refere ao desperdício dos vários tipos de energia, como, por exemplo:*
*- Energia térmica: quando deixamos uma geladeira aberta, haverá um custo para que seu interior se esfrie novamente.*
*- Energia elétrica: banhos de chuveiro elétrico demorados geram enorme consumo de eletricidade, que também terá um custo.*
*- Energia química: carros mal regulados consomem mais do que o normal, aumentando assim o gasto de combustível.*

*Todas essas transformações, cuja energia não pode ser reaproveitada, são chamadas de transformações. Ou seja, é impossível pegar o frio que sai da geladeira enquanto a porta está aberta e colocá-lo de volta dentro da geladeira. É impossível pegar a eletricidade que foi usada no chuveiro elétrico e colocá-la de volta no fio. É impossível usar o gás que saiu do escapamento de um automóvel, para encher novamente o tanque de gasolina!*

*A maioria das transformações de energia são do tipo irreversível. Isso significa que a energia útil se transformou num outro tipo de energia e não pode ser reutilizada.*

*Uma pequena parte das transformações são do tipo reversível, ou seja, a energia pode ser transformada em outra forma de energia e depois voltar a ser o que era. Um sistema que tem essa propriedade é chamado de* ***sistema conservativo*** *.*

***Telecurso de Física - 2º grau do***
***Telecurso 2000- Aula 16***

## *Forças conservativas e não-conservativas*

Uma força conservativa caracteriza-se por executar um trabalho nulo quando se considera um percurso fechado.

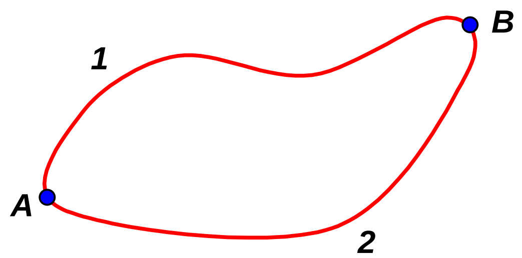
No sistema massa - mola, quando a massa retorna a um dado ponto, ela tem a mesma energia cinética da passagem anterior, com a mesma capacidade de produzir trabalho, portanto o trabalho realizado pela mola foi nulo, neste percurso fechado.

A energia potencial está sempre associada a uma força. A energia potencial de um corpo representa a capacidade dele produzir energia cinética ou, de maneira mais genérica, transformar essa energia num outro tipo de energia. Um corpo que está numa certa altura acima do solo, tem energia potencial gravitacional. Quando solto, ele cairá em direção ao solo, transformando essa energia potencial em energia cinética à medida que cai. Se colocarmos no solo uma mola numa posição adequada, o corpo irá atingi-la e comprimi-la até parar. Em síntese: a energia potencial gravitacional do início do movimento do corpo foi transformada totalmente em energia cinética que por sua vez foi transformada totalmente em energia potencial da mola.

Essas mudanças de forma de energia se processaram sem perdas porque eram conservativas as forças envolvidas na situação descrita.

Não podemos associar energia potencial com uma força não-conservativa (tal como a força de atrito) porque a energia cinética de um sistema em que tais forças atuam não retorna ao seu valor inicial, quando o sistema recupera a sua configuração inicial.

Vamos considerar uma força conservativa que atua sobre uma partícula ao longo de um percurso fechado, indo do ponto $A$ até o ponto $B$ pelo caminho $1$ da figura ao lado, e voltando de $B$ para $A$ pelo caminho $2$ . Temos então que:




$$W_{AB,1} + W_{BA,2} = 0$$

ou seja:

$$W_{AB,1} = - W_{BA,2}$$

Mas como a força é conservativa, ir e voltar pelo mesmo caminho ***2*** será apenas uma questão de sinal:

$$W_{BA,2} = - W_{AB,2}$$

e finalmente:

$$W_{AB,1} = W_{AB,2}$$

ou seja: o trabalho para ir do ponto ***A*** até o ponto ***B*** independe do percurso quando a força for conservativa. Esse trabalho será o mesmo caso se utilize o percurso ***1*** , ***2*** ou qualquer outro percurso.

### *Trabalho e energia potencial*

Quando a força for conservativa, podemos definir a energia potencial associada à essa força. Define-se a diferença de energia potencial $\Delta U$ entre os pontos $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$ do seguinte modo:

$$\Delta U = U(\vec{r}_f) - U(\vec{r}_i) = -W_{if} = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ou seja:

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

A energia potencial é sempre definida em relação a um determinado referencial de energia. No caso anterior, definiu-se a energia potencial $U(\vec{r})$ no ponto definido pelo vetor $\vec{r}$, em relação à energia potencial $U(\vec{r}_0)$ no ponto definido pelo vetor $\vec{r}_0$. Estamos definindo, desse modo, um referencial $U(\vec{r}_0)$ de energia potencial e todos os outros valores serão medidos em relação a este referencial.

### *Forças conservativas - Energia mecânica*

Já foi estabelecido que o trabalho executado pela força resultante é igual a variação da energia cinética. Ou seja:

$$W_{if} = \Delta K = K_f - K_i$$

mas tendo em vista os resultados anteriores:

$$W_{if} = \Delta K = -\Delta U \quad \therefore \quad \Delta(K + U) = \Delta E = 0 \quad onde \quad E = K + U$$

onde essa dedução é absolutamente geral, apesar de ter sido feita para apenas uma força atuando em apenas uma partícula. Ela é válida para um sistema composto de um número qualquer de partículas, quando estão atuando nessas partículas quaisquer quantidade de forças conservativas.

A nova grandeza definida, ***a energia mecânica*** $E = K + U$ é uma constante de movimento

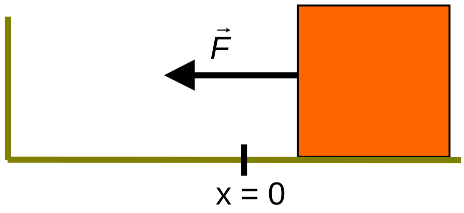
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) = constante$$

Algumas forças tem uma existência marcante, seja no meio acadêmico ou na vida prática. Vamos calcular a energia potencial associada a algumas destas forças.

O sistema massa - mola encontra-se presente no dia a dia como exemplo de sistema conservativo oscilante, onde a força que a mola exerce é variável. Esse é um tipo de força elástica.

Energia potencial elástica

$$U(\vec{R}) = U(0) - \int_0^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{\vec{R}} \left(-k\vec{r}\right) \cdot d\vec{r}$$




Como o deslocamento se dá no eixo x , temos que:

$$\begin{cases} \vec{r} = \hat{i}x \\ d\vec{r} = \hat{i}dx \end{cases} \quad \therefore \quad \vec{r} \cdot d\vec{r} = x\,dx$$

logo, o trabalho realizado pela mola será:

$$U(L) = U(0) + k\int_0^L x\,dx = U(0) + k\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{1}{2}kL^2$$

onde estamos considerando o referencial de energia potencial *U( x = 0 ) =0*

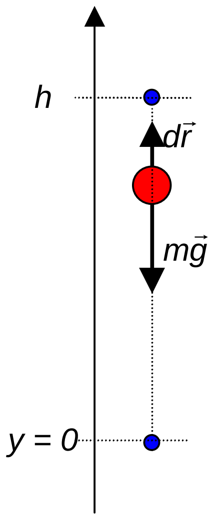
Considerando o resultado anterior, dizemos que a energia potencial elástica de um sistema massa - mola tem a forma:

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

Outro exemplo interessante é a energia potencial associada à força gravitacional. É um caso de energia potencial associada a uma força constante.

Energia potencial gravitacional

$$U(\vec{R}) = U(0) - \int_0^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{onde} \qquad \begin{cases} \vec{F} = -\hat{j}\,mg \\ d\vec{r} = \hat{j}\,dy \end{cases}$$




$$U(h) = U(0) - \int_0^h \left(-mg\,\hat{j}\right) \cdot \hat{j}\,dy = mg\int_0^h dy$$

$$U(h) = m\,g\,h$$

onde estamos considerando o referencial de energia potencial $U( x = 0 ) =0$ .

Considerando o resultado anterior, dizemos que a energia potencial gravitacional tem a forma:

$$U(y) = m\,g\,y$$

### *Cálculo da trajetória a partir do potencial*

Podemos conhecer a trajetória de uma partícula a partir do conhecimento do potencial ao qual ela está submetida. Quando temos a forma do potencial, como foi mencionado, ele obedece à equação:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = constante$$

ou seja:

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - U(x) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \quad \therefore \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

ou seja:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

À partir da forma da energia potencial *U(x)* poderemos calcular a trajetória da partícula ao fazer o cálculo da integral indicada.

### *Usando a curva da energia potencial*

Em diversas situações não é possível fazer o cálculo da integral de movimento. Mas mesmo nesse caso, a equação da conservação da energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = constante$$

ou a equação que se origina nela

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

nos dará informações úteis sobra a solução ou sobre o comportamento da partícula.

Como a energia mecânica *E* é igual à soma das energias potencial *U(x)* mais cinética *K* , o maior valor da energia potencial será quando toda a energia mecânica for potencial, ou seja:

$$E \geq U(x)$$

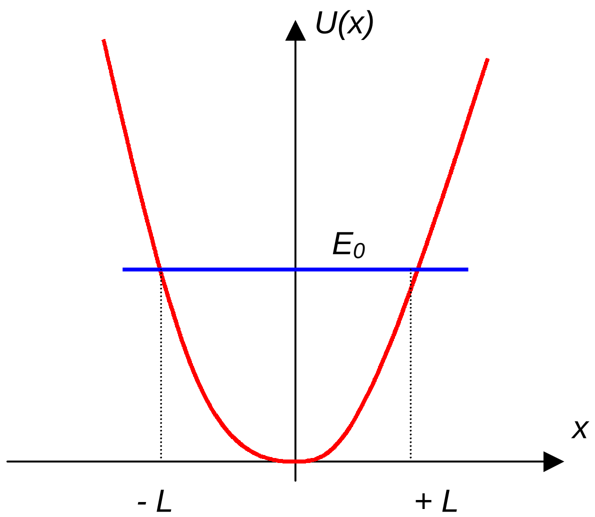
O gráfico da energia potencial elástica é um exemplo simples da utilidade da análise do movimento de uma partícula a partir da forma funcional da energia potencial.

Vamos considerar que a energia mecânica deste sistema tem valor $E_0$ .

i. Quando $x = \pm L$ toda a energia mecânica está sob a forma de energia potencial. Esses pontos $x = \pm L$ são chamados pontos de inversão pois ao chegar neles a velocidade da partícula se anula e inverte o sentido.

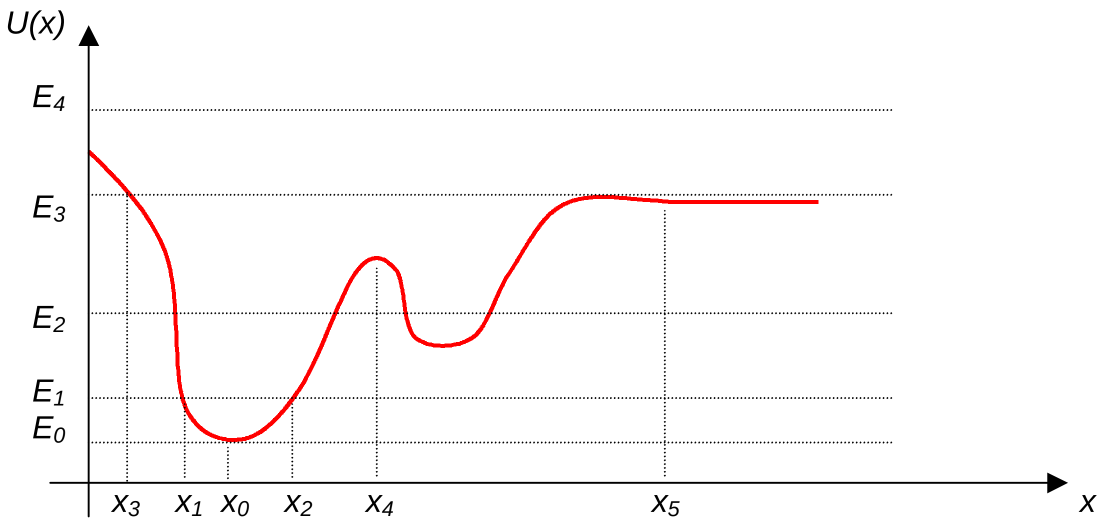
ii. Quando $x = 0$ toda a energia mecânica é cinética.

iii. O movimento da partícula está confinado à região $- L \geq x \geq + L$ .




A seguir mostramos um gráfico da energia potencial de uma partícula, que tem um comportamento rico em detalhes.

De modo geral o gráfico da energia potencial de uma partícula apresenta várias situações físicas. Mostra o problema para vários valores de energia mecânica. Para cada valor de energia mecânica a partícula se comporta de um modo diferente.




*a.* $E = E_0$

*Para esse valor de energia mecânica, toda a energia é potencial e portanto a energia cinética será sempre zero. A partícula vai estar permanentemente localizada na posição* $x = x_0$ *e com velocidade nula.*

*Como um exemplo dessa situação podemos lembrar uma mola que está em sua posição de equilíbrio com velocidade nula. Ele vai permanecer indefinidamente nessa situação.*

b. *$E = E_1$*

*Como $E \geq U(x)$ para esse valor de energia mecânica $x_1 \geq x \geq x_2$. A partícula está confinada a se movimentar entre os pontos $x_1$ e $x_2$, passando pelo ponto $x_0$, de mínimo da energia potencial e consequentemente de máximo da energia cinética. Nos pontos $x_1$ e $x_2$ temos $E_1 = U(x_1) = U(x_2)$, e portanto toda a energia é potencial. Isso implica que a energia cinética é nula nesses pontos. Esses pontos são chamados pontos de retorno (ou pontos de inversão) pois a partícula estava se movendo em um sentido, sua velocidade se anulou e ela retornou usando o sentido contrário.*

*Como um exemplo dessa situação podemos considerar uma mola que está em sua posição de equilíbrio com uma certa velocidade não nula. Ela vai ficar se movendo entre duas posições e sempre passando pelo ponto de máxima energia cinética. Como exemplo apenas de ponto de retorno podemos considerar uma pedra lançada verticalmente para cima. Ao atingir o ponto de máxima altura ela irá parar e começará o retorno. nesse ponto a energia cinética é nula.*

*c. $E = E_2$*

*Existem quatro pontos de retorno*

*d. $E = E_3$*

*Existe apenas um ponto de inversão. Se a partícula estiver se movendo em direção ao ponto $x = 0$, ao chegar em $x = x_3$ ela pára, retornando no sentido contrário.*

*e. $E = E_4$*

*Não existem pontos de retorno.*

Da relação entre força e potencial podemos fazer várias inferências. Como já foi mencionado anteriormente

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

Em uma dimensão, a equação anterior tem a forma:

$$U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x) dx \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

e desse modo podemos dizer que:

i. ***Mínimo de U(x) ⇒ F(x) = 0 ⇒ equilíbrio estável***

ii. ***Máximo de U(x) ⇒ F(x) = 0 ⇒ equilíbrio instável***

iii. ***U(x) = constante ⇒ F(x) = 0 ⇒ equilíbrio indiferente***

Podemos analisar as ***situações de equilíbrio*** no gráfico anterior do seguinte modo:

a. No ponto $x = x_0$ temos um ***equilíbrio estável*** e citaremos como exemplo dessa situação um pêndulo em equilíbrio na sua posição vertical inferior. Se alterarmos a sua posição, surge uma força restauradora e o sistema tende a voltar à posição de equilíbrio inicial.

b. No ponto $x = x_4$ temos um ***equilíbrio instável*** e citaremos como exemplo dessa situação um pêndulo em equilíbrio na sua posição vertical superior. Se alterarmos a sua posição, surge uma força que afasta ainda mais o sistema de sua situação de equilíbrio inicial.

c. No ponto $x \geq x_5$ temos um ***equilíbrio indiferente*** . . Se alterarmos a sua posição não acontece nenhuma das duas situações anteriores. Uma exemplo desse caso seria um cone apoiado em uma face lateral.

***Forças não conservativas***

Vamos considerar que estão atuando $N$ forças sobre uma dada partícula, de modo que a força resultante será dada por:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Como já foi mencionado, o trabalho executado pela força resultante é igual à variação da energia cinética da partícula:

$$\Delta K = W_F = W_1 + W_2 + \ldots + W_N = \sum_{i=1}^{N} W_i$$

onde $W_i$ é o trabalho executado pela i-ésima força que está atuando na partícula.

Se forem ***conservativas*** todas as forças mencionadas, teremos:

$$\Delta K = \Sigma W_C = -\Sigma \Delta U \quad \therefore \quad \Delta K + \Sigma \Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(K + \Sigma U) = \Delta E = 0$$

Para cada força conservativa teremos a sua energia potencial associada a ela, daí a soma das energias potenciais. A soma das energias potenciais com a energia cinética nos dá a energia mecânica $E$ . Quando existem apenas forças conservativas, a energia mecânica não varia $\Delta E = 0$ , sendo então uma constante de movimento.

Se, por outro lado, tivermos atuando também forças ***não - conservativas*** (*em particular a força de atrito*), teremos:

$$\Delta K = \Sigma W_C + \Sigma W_A = -\Sigma \Delta U + \Sigma W_A \quad \therefore$$

$$\Delta K + \Sigma \Delta U = \Sigma W_A \quad \Rightarrow$$

$$\Delta(K + \Sigma U) = \Delta E = \Sigma W_A$$

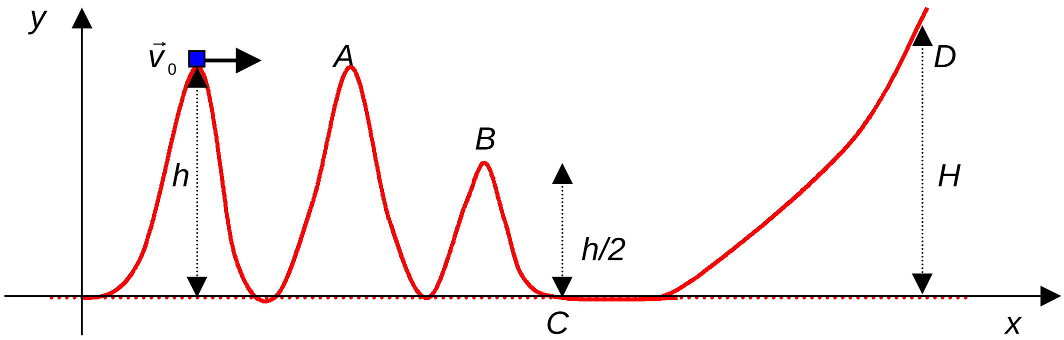
$$\Delta E = E_f - E_i = \Sigma W_A$$

como é negativo o trabalho executado pela força de atrito, acontecerá uma perda da energia mecânica; a energia mecânica fina será menor que a energia mecânica inicial

$$\Delta E < 0$$

***Solução de alguns problemas***

| Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição | |
|---|---|
| 7 | Um carrinho de montanha russa sem atrito chega ao alto da primeira rampa da figura a seguir com velocidade $\vec{v}_0$ . |




**a)** Qual a sua velocidade no ponto ***A*** ?

Considerando o ponto mais baixo da trajetória do carrinho como a origem do referencial da energia potencial, temos que

$$U(y=0) = 0 \quad \text{e} \quad U(y=h) = mgh$$

Desse modo, a energia mecânica inicial é dada por:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + mgh$$

Como só estão atuando forças conservativas $E_A = E_0$ e como a altura do ponto A é a mesma altura da posição inicial as velocidades serão as mesmas:

$$v_A = v_0$$

**b)** Qual a sua velocidade no ponto ***B*** ?

$$E_0 = E_B \quad \therefore \quad \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2} + mg\left(\frac{h}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_0^2 + gh}$$

**c)** Qual a sua velocidade no ponto ***C*** ?

$$E_0 = E_C \quad \therefore \quad \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

**d)** A que altura chegará à última rampa, que é alta demais para ser ultrapassada?

$$E_0 = E_D \quad \therefore \quad \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgH \quad \Rightarrow \quad H = h + \frac{v_0^2}{2g}$$

| Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição | |
|---|---|
| 10 | Um projétil de massa *2,40kg* é disparado para cima, do alto de uma colina de *125m* de altura, com uma velocidade de *150m/s* e numa direção que faz $41^0$ com a horizontal. |

**a)** Qual a energia cinética do projétil no momento em que é disparado?

$m = 2{,}40kg$
$h = 125m$
$v_0 = 150m/s$
$\theta_0 = 41^0$

$$K_0 = \frac{m v_0^2}{2} = 27.000J$$

**b)** Qual a energia potencial do projétil no mesmo momento? Suponha que a energia potencial gravitacional é nula na base da colina ( $y=0$ ) .

$$U_0 = m\,g\,h = 2.940J$$

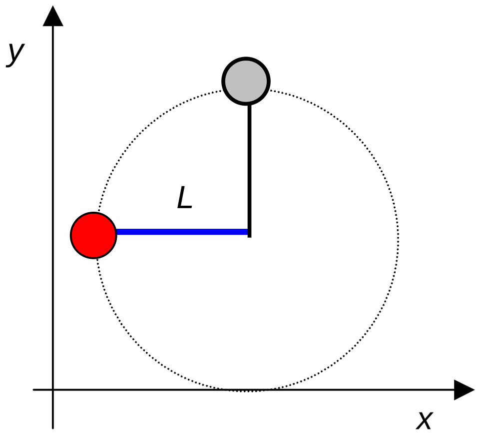
**c)** Determine a velocidade do projétil no momento em que atinge o solo. Supondo que a resistência do ar possa ser ignorada, as respostas acima dependem da massa do projétil?

$$E_F = E_0 \quad \therefore \quad \frac{m v_F^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} + mgh \quad \Rightarrow \quad v_F = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

As respostas dos itens *a* e *b* dependem da massa do projétil, como pode ser constatado nas equações. A velocidade ao atingir o solo não depende da massa do projétil, como pode ser notado na equação anterior.

| Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição | |
|---|---|
| 13 | Uma bola de massa *m* está presa à extremidade de uma barra de comprimento *L* e massa desprezível. A outra extremidade da barra é articulada, de modo que a bola pode descrever um círculo no plano vertical. A barra é mantida na posição horizontal, como mostra a figura a seguir, até receber um impulso para baixo suficiente para chegar ao ponto mais alto do círculo com velocidade nula. |

**a)** Qual a variação da energia potencial da bola?




Considerando o ponto mais baixo da trajetória da bola como a origem do referencial da energia potencial, temos que $U(y=0) = 0$. Desse modo, a energia potencial gravitacional é dada por

$$U(y) = m\,g\,y$$

A diferença de altura entre as posições inicial e final é *L* , logo:

$$\Delta U = m\,g\,\Delta y = m\,g\,L$$

**b)** Qual a velocidade inicial da bola?

Vamos considerar como origem da energia potencial o ponto mais baixo da trajetória da bola.

$$E_i = E_f$$

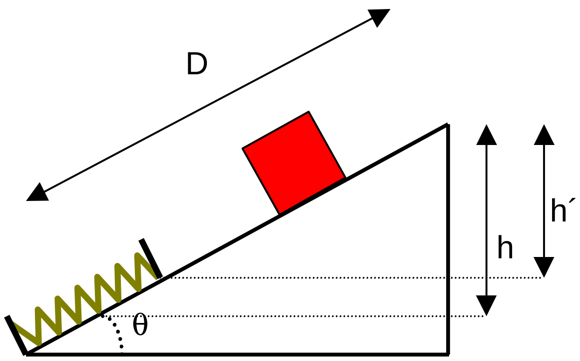
$$mgy_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = mgy_f + \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \Rightarrow \quad mgL + \frac{1}{2}mv_i^2 = mg(2L)$$

$$v_i = \sqrt{2gL}$$

| Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição | |
|---|---|
| 17 | Uma mola pode ser comprimida $2cm$ por uma força de $270N$ . Um bloco de $12kg$ de massa é liberado a partir do repouso do alto de um plano inclinado sem atrito cuja inclinação é de $30^0$ . O bloco comprime a mola de $5,5cm$ antes de parar |

**a)** Qual a distância percorrida pelo bloco até parar?

$L_0 = 2cm = 0,020m$
$F_0 = 270N$
$\theta = 30^0$
$m = 12kg$
$L = 5,5cm = 0,055m$




Inicialmente vamos calcular a constante elástica da mola:

$$F_0 = k\,L_0 \quad \therefore \quad k = 13.500N/m$$

Seja $D$ a distância que o bloco irá percorrer antes de parar. Parte dessa distância ( $D$ - $L$ ) o bloco percorre livre e a outra parte ( $L$ ) ele percorre comprimindo a mola. Inicialmente ele estava em repouso e tinha energia potencial gravitacional, e após o movimento de descida ele volta ao repouso e agora a sua energia e potencial elástica. Aconteceu uma transformação de energia: de potencial gravitacional para potencial elástica. temos portanto que:

$$mgh = \frac{1}{2}kL^2$$

Mas

$$h = D\ sen\theta$$

então

$$mgD\,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}kL^2 \quad \therefore \quad D = \frac{kL^2}{2mg\,\text{sen}\,\theta} = 0,347m = 34,7cm$$

**b)** Qual a velocidade do bloco no instante em que se choca com a mola?

Quando o bloco percorreu livre a distância D - L , ele diminuiu a sua altura de h´, como mostrado na figura. Logo:

$$h' = ( D - L ) \, sen\theta = 0{,}146m$$

Se v for a velocidade com que o bloco se choca com a mola:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh'} = 1{,}69m/s$$

| Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição | |
|---|---|
| 23 | A corda da figura a seguir tem $L = 120cm$ de comprimento e a distância $d$ até o pino fixo P é $75cm$ . Quando a bola é liberada em repouso na posição indicada na figura, descreve a trajetória indicada pela linha tracejada. |

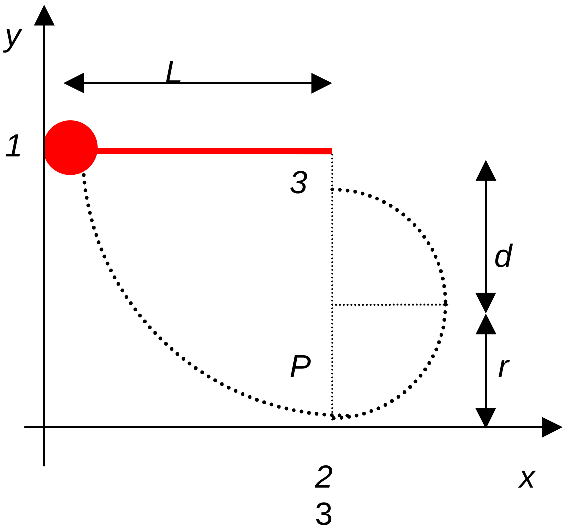
**a)** Qual a velocidade da bola quando está passando pelo ponto mais baixo da trajetória?

Considerando o ponto mais baixo da trajetória da bola como a origem do referencial da energia potencial, temos que $U(y=0) = 0$ e $U(y=L) = mgL$ .

Como a energia mecânica se conserva:

$$E_1 = E_2$$

$$mgL = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \therefore \quad v_2 = \sqrt{2gL} = 4{,}84m/s$$




**b)** Qual a velocidade da bola quando chega ao ponto mais alto da trajetória, depois que a corda toca no pino?
De maneira equivalente, temos a conservação da energia mecânica:

$$E_1 = E_3$$

$$mgL = \frac{1}{2}mv_3^2 + mg[2(L-d)]$$

de onde encontramos que:

$$v_3 = \sqrt{2g\,(2d-L)} = 2{,}42m/s$$

32 Mostre que se a bola faz uma volta completa em torno do pino, então $d > 3L/5$ .

A bola irá fazer uma volta completa e passar pelo ponto 3 sem afrouxar a corda quando a velocidade $v_3$ tiver um valor mínimo tal que a força centrípeta seja igual ao seu peso. Essa imposição implica que a tensão na corda será nula.

$$P = (F_C)_3 \quad \Rightarrow \quad mg = m\frac{v_3^2}{r} \quad \therefore \quad v_3^2 = gr = g(L-d)$$

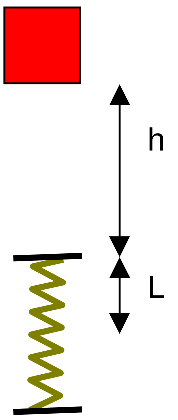
Usando o resultado do item anterior, temos:

$$v_3^2 = 2g(2d - L) = g(L - d) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3L}{5}$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

25 Deixa-se cair um bloco de *2kg* de uma altura de *40cm* sobre uma mola cuja constante é *k = 1960N/m* . Determine a compressão máxima da mola

*m = 2kg*
*h = 40cm = 0,40m*
*k = 1960N/m*




A mola será largada com velocidade nula, cairá até encontrar a mola, pressionará a mola até alcançar novamente o repouso. Desse modo, ela terá energia potencial gravitacional na posição inicial e energia potencial elástica no final:

$$E_i = E_f$$

$$mg(h + L) = \frac{1}{2}kL^2 \quad \Rightarrow \quad L^2 = \frac{2mg}{k}(h + L) \quad \therefore \quad L^2 - \frac{2mg}{k}L - \frac{2mg}{k}h = 0$$

$$L = \frac{\frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{2mg}{k}\right)^2 + 4\frac{2mg}{k}h}}{2} = \frac{0{,}02 \pm 0{,}18}{2} = \begin{cases} +0{,}10 \\ -0{,}08 \end{cases}$$

Como L deve ser positivo, a solução aceitável fisicamente é:

$$L = 0{,}10m = 10cm$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

28 O módulo da força de atração gravitacional entre duas partículas de massas $m_1$ e $m_2$ é dado por:

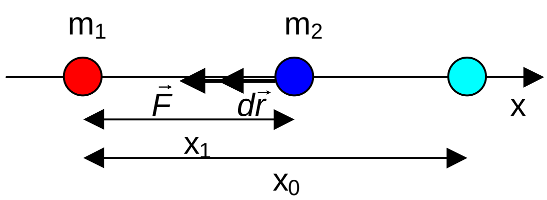
$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2}$$

onde $G$ é uma constante e $x$ é a distância entre as duas partículas.

**a)** Qual é a forma funcional da energia potencial gravitacional U(x) ? Suponha que U(x) $\rightarrow$ 0 quando x $\rightarrow \infty$ .

De maneira geral nós temos que:

$$U(\vec{r}_1) = U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$



Como

$$\begin{cases} \vec{F}(\vec{r}) = -\hat{i}F(x) \\ d\vec{r} = (-\hat{i})(-dx) = \hat{i}dx \end{cases}$$

temos:

$$U(x_1) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} \left(-\hat{i}F(x)\right) \cdot \left(\hat{i}dx\right) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = U(x_0) + Gm_1m_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x^2}$$

$$U(x_1) = U(x_0) - Gm_1m_2\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right)$$

Usando as condições indicadas no enunciado, encontramos que:

$$U(x_1) = -G\frac{m_1m_2}{x_1}$$

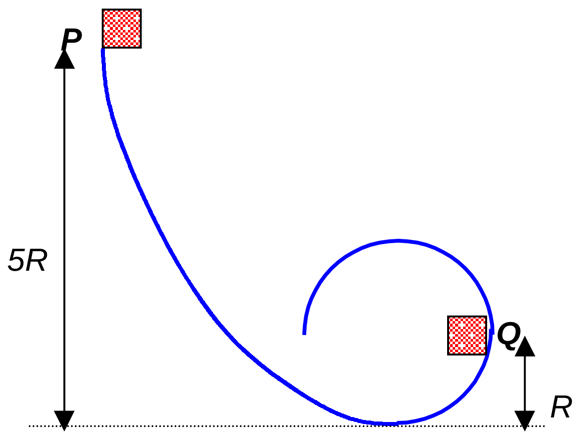
**b)** Qual o trabalho necessário para aumentar a distância entre as partículas de $x_a = x_1$ para $x_b = x_1 + d$ ?

$$\Delta U = U(x_b) - U(x_a) = -W_{ab}$$

$$-W_{ab} = -G\frac{m_1m_2}{x_b} + G\frac{m_1m_2}{x_a} = Gm_1m_2\frac{x_b - x_a}{x_bx_a} \quad \therefore \quad W_{ab} = -Gm_1m_2\frac{d}{x_1(x_1 + d)}$$

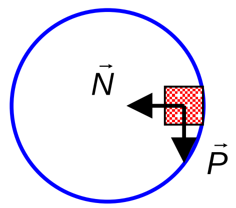
| Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição | |
|---|---|
| 30 | Um pequeno bloco de massa $m$ desliza sem atrito na pista da figura a seguir. |

**a)** O bloco é liberado em repouso no ponto $\boldsymbol{P}$ . Qual a força resultante que age sobre ele no ponto $\boldsymbol{Q}$ ?




No ponto $\boldsymbol{Q}$ existem duas forças atuando no bloco: o seu peso e a força que a pista exerce nele (normal). A normal é a força radial que está atuando, ou seja é a força centrípeta. Para calcular a força centrípeta vamos usar a conservação da energia mecânica, ou seja: a energia mecânica no ponto $\boldsymbol{P}$ é igual a energia mecânica no ponto $\boldsymbol{Q}$ .

$$E_P = E_Q$$




$$mgh_P = mgh_Q + \frac{1}{2}mv_Q^2$$

$$v_Q^2 = 2g\left(h_P - h_Q\right) = 2g(5R - R) = 8gR$$

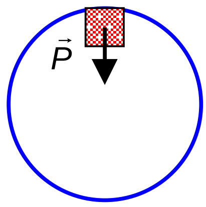
$$N = F_C = m\frac{v_Q^2}{R} = m\frac{8gR}{R} \quad \therefore \quad N = 8mg$$

A força resultante será $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N}$ . Como esses vetores são perpendiculares, a resultante é a hipotenusa de um triângulo retângulo, e portanto:

$$R = \sqrt{P^2 + N^2} = \sqrt{(mg)^2 + (8mg)^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{65}\,mg$$

**b)** De que altura em relação ao ponto mais baixo da pista o bloco deve ser liberado para que esteja na iminência de perder o contato com a pista no ponto mais alto do semi-círculo?

Quando o bloco perde o contato com a pista , a normal se anula (e vice-versa). Nessa situação, a única força que estará atuando no corpo será o seu peso e portanto a força centrípeta será igual ao peso:



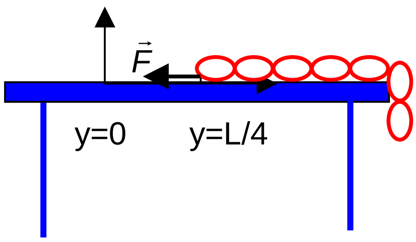

$$m\frac{v_F^2}{R} = mg \quad \therefore \quad \frac{1}{2}mv_F^2 = \frac{1}{2}mgR$$

Na posição inicial, quando o bloco é solto ele tem apenas energia potencial gravitacional, logo:

$$E_I = E_F \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_F^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}mgR + 2mgR = \frac{5}{2}mgR \quad \therefore \quad h = \frac{5R}{2}$$

| Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição | |
|---|---|
| 35 | Uma corrente é mantida sobre uma mesa sem atrito com um quarto do seu comprimento pendurado para fora da mesa, como mostra a figura. Se a corrente tem comprimento $L$ e uma massa $m$ , qual o trabalho necessário para puxá-la totalmente para cima da mesa? |

A força necessária para puxar com velocidade constante a corrente para cima da mesa é uma força variável. Ela depende da quantidade de corrente que está pendurada. Num pedaço de corrente de tamanho y temos uma massa m(y) e no tamanho total M temos a massa total M, logo:




$$\left.\begin{matrix} m(y) \to y \\ M \to L \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{m(y)}{y} = \frac{M}{L} \quad \therefore \quad m(y) = \frac{M}{L}y$$

A força necessária, terá a forma:

$$F(y) = \left(\frac{Mg}{L}\right)y$$

$$W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = -\hat{j}\,F(y) \\ d\vec{r} = -\hat{j}dr = \hat{j}dy \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F(y)dy \quad \Rightarrow \quad W = \int_{L/4}^{0} \left[-F(y)dy\right]$$

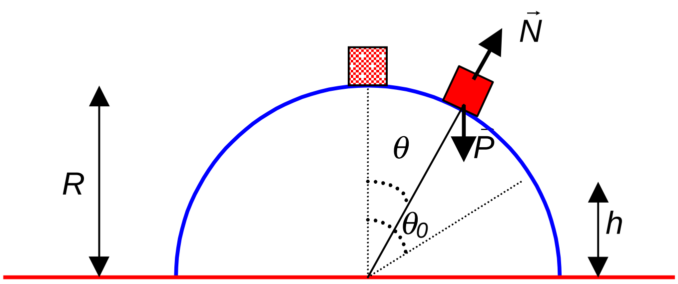
$$W = -\frac{Mg}{L}\int_{L/4}^{0} ydy = \frac{Mg}{L}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{4}\right)^2\right] \quad \therefore \quad W = \frac{MgL}{32}$$

| Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição | |
|---|---|
| 37 | Um menino está sentado no alto de um monte hemisférico de gelo. Ele recebe um pequeníssimo empurrão e começa a escorregar para baixo.<br>Mostre que, se o atrito com o gelo puder ser desprezado, ele perde o contato com o gelo num ponto cuja altura é *2R/3* . |

O menino vai descer do monte acelerado. Podemos separar as acelerações em aceleração radial e aceleração tangencial (aceleração centrípeta) :

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} P\cos\theta - N = m\,a_R \\ P\,\text{sen}\theta = m\,a_T \end{cases}$$




$$N = P\cos\theta - m\,a_R \quad \therefore \quad N = m\,(\,g\cos\theta - a_R\,)$$

O corpo do menino perde o contato com o hemisfério quando a normal se anular, logo para $\theta = \theta_0$ :

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad a_R = g\cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{R}$$

Como este sistema é conservativo, a energia mecânica do menino no topo do hemisfério será igual àquela no ângulo $\theta = \theta_0$ :

$$mgR = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad ; \quad h = R\cos\theta_0$$

$$v_0^2 = 2gR(1-\cos\theta_0) \quad \therefore \quad a_R = \frac{v_0^2}{R} = 2g(1-\cos\theta_0)$$

Mas quando a normal for nula

$$a_R = g\cos\theta_0 = 2\,g\,(\,1 - \cos\theta_0\,) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$

$$h = R\cos\theta_0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2R}{3}$$