Versão preliminar
10 de setembro de 2002

09. Sistema de partículas

O centro de massa

Mesmo quando um corpo gira ou vibra, existe um ponto nesse corpo, chamado centro de massa, que se desloca da mesma maneira que se deslocaria uma única partícula, com a massa deste corpo e sujeita ao mesmo sistema de forças que ele.

Ainda que o sistema não seja um corpo rígido mas um conjunto de partículas, pode ser definido para ele um centro de massa, como veremos adiante.

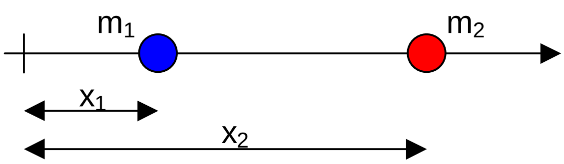
Sistema de partículas - Uma dimensão

Vamos definir inicialmente a posição x_{CM} do centro de massa para um sistema composto de duas partículas de massas m_1 e m_2 e que ocupam as posições x_1 e x_2 .

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

ou

$$x_{CM} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) x_1 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) x_2$$



Podemos olhar a última equação como uma média ponderada da posição de cada partícula de massa m_i onde o "peso" de cada termo é a fração da massa total contida na posição x_i .

Para um sistema de N corpos dispostos ao longo de uma linha reta, podemos fazer uma extensão da definição anterior:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Iremos definir a massa total do sistema como M , onde:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

e desse modo teremos:

$$M x_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Sistema de partículas - Duas dimensões

Para a definição do centro de massa de um sistema de N partículas distribuídas em um plano podemos, por analogia com as definições anteriores, considerar que:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

Sistema de partículas - Três dimensões

Para um sistema de N partículas distribuídas em três dimensões temos as seguintes definições:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Se considerarmos que:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i \\ \quad e \\ \vec{r}_{CM} = \hat{i}x_{CM} + \hat{j}y_{CM} + \hat{k}z_{CM} \end{cases}$$

teremos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Corpos rígidos

Podemos imaginar um corpo rígido como sendo subdividido em pequenos elementos de volume ΔV_i de massa Δm_i respectivamente, que estão localizados em pontos definidos por coordenadas (x_i , y_i , z_i) . Neste cenário, teremos as seguintes equações:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i}$$

Se os elementos de volume $\Delta V_i \rightarrow 0$, as massas contidas nesses elementos de volume também de serão reduzidas, ao ponto de $\Delta m_i \rightarrow 0$. Quando isso acontece, aquelas somas se transformam em integrais:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$y_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

$$z_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

e concluindo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Movimento do centro de massa

A partir da definição de centro de massa temos a seguinte equação:

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N$$

A variação dessas posições com o tempo é calculada como:

$$M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + m_N\frac{d\vec{r}_N}{dt}$$

de modo que a velocidade do centro de massa tem a forma:

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$$

A variação dessas velocidades com o tempo é calculada como:

$$M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \dots + m_N\frac{d\vec{v}_N}{dt}$$

de modo que a aceleração do centro de massa tem a forma:

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots + m_N\vec{a}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i$$

Cada termo da equação anterior refere-se a uma partícula específica, e é igual à força resultante que atua nessa partícula.

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Mas a força resultante que atua em uma partícula que faz parte desse sistema é composta de duas partes: as forças externas a esse sistema que atuam em cada partícula e as forças internas de interação mútua entre as partículas.

$$M\vec{a}_{CM} = \left(\vec{F}_{1EXT} + \vec{F}_{1INT}\right) + \left(\vec{F}_{2EXT} + \vec{F}_{2INT}\right) + \dots \left(\vec{F}_{NEXT} + \vec{F}_{NINT}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{iEXT} + \vec{F}_{iINT}\right) = \vec{F}_{EXT} + \vec{F}_{INT}$$

Mas quando considerarmos a soma das forças internas estaremos incluindo pares de forças que se anulam, segundo a Terceira Lei de Newton por serem ação e reação. Por exemplo: iremos incluir as forças que a partícula 2 exerce na partícula 3 como também as forças que a partícula 3 exerce na partícula 2. E essas forças de interação se anulam. Isso acontece com todos os pares de partículas que considerarmos. Assim a soma total das forças internas que atuam em um sistema de partículas é nula, e desse modo:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{EXT}$$

Essa equação diz que o centro de massa de um sistema de partículas se move como se toda a massa M desse sistema estivesse concentrada nesse ponto e essa massa estivesse sob a ação da força externa resultante.

Momento linear de uma partícula

Define-se o momentum (ou momento) linear de uma partícula como sendo o produto de sua massa por sua velocidade:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Conta-se que Newton na realidade formulou a sua Segunda Lei em termos do momento, da seguinte maneira:

A taxa de variação do momento de uma partícula é proporcional à resultante das forças que agem sobre essa partícula, e tem a mesma direção e o mesmo sentido que essa força.

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Para os sistemas de massa constante:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Momento linear de um sistema de partículas

Para um sistema composto de N partículas, definimos o momento total como:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

ou ainda:

$$P = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}$$

Já foi mostrado que:

$$M\vec{a}_{CM} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{EXT}$$

e quando $M = constante$, temos

$$\vec{F}_{EXT} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Conservação do momento linear

Quando estivermos considerando um sistema isolado, onde a resultante das forças externas for nula, teremos:

$$\vec{F}_{EXT} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = constante$$

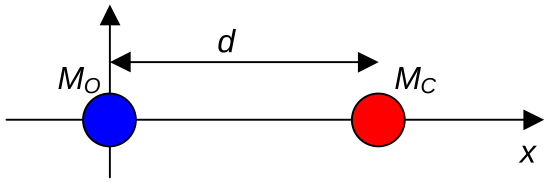
indicando que o momento total do sistema é uma constante. Por exemplo, numa colisão entre duas bolas de bilhar, o momento total desse sistema isolado se conserva: o momento total antes da colisão é igual ao momento total depois da colisão.

Solução de alguns problemas

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
2	A distância entre os centros dos átomos de carbono C e oxigênio O em uma molécula de monóxido de carbono CO é de $1,131x10^{-10}m$. Determine a posição do centro de massa da molécula de CO em relação ao átomo de carbono. Use as massas dos átomos de C e O .

Por definição temos que:

$$x_{CM} = \frac{M_O d_O + M_C d_C}{M_O + M_C}$$



onde $d_O = d - d_C$

Vamos escolher a origem do eixo x como passando pelo átomo de oxigênio. Com essa escolha teremos $d_0 = 0$ e $d_C = d = 1,131x10^{-10}m$, e portanto:

$$x_{CM} = \frac{M_C d}{M_O + M_C} \quad \therefore \quad d_C = \left(\frac{M_C}{M_O + M_C}\right)d$$

considerando que:

$M_O = 15,994g/mol$

$M_C = 12,011g/mol$

$$d_{CM} = 0,571\ d = 0,645x10^{-10}m$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
3	Quais são as coordenadas do centro de massa das três partículas que aparecem no desenho a seguir? O que acontece com o centro de massa quando a massa da partícula de cima aumenta gradualmente? As unidade das distâncias é o metro.

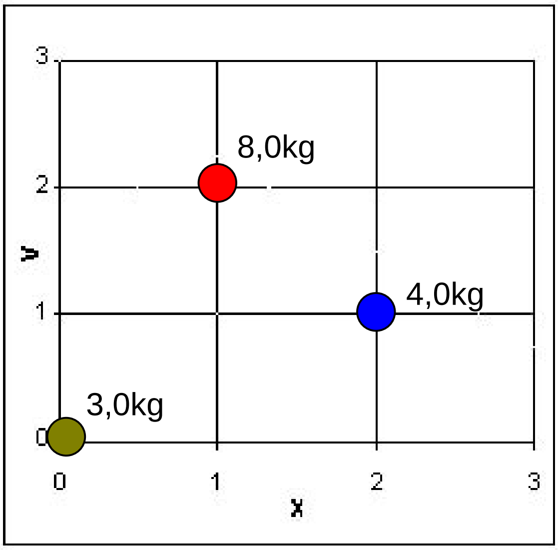
a)

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{CM} = \frac{3x0 + 8x1 + 4x2}{3 + 8 + 4} = \frac{16}{15} = 1{,}07m$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{CM} = \frac{3x0 + 8x2 + 4x1}{3 + 8 + 4} = \frac{20}{15} = 1{,}34m$$



b) O que acontece com o centro de massa quando a massa da partícula de cima aumenta gradualmente?

Usando as definições das coordenadas do centro de massa, podemos dizer que:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Se a massa da partícula 2 aumenta gradualmente, passando do valor m_2 para o valor $m_2 + \Delta m_2$, a equação acima tomará a forma:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + (m_2 + \Delta m_2)\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \vec{r}_{CM} + \frac{\Delta m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{r}_2$$

ou seja:

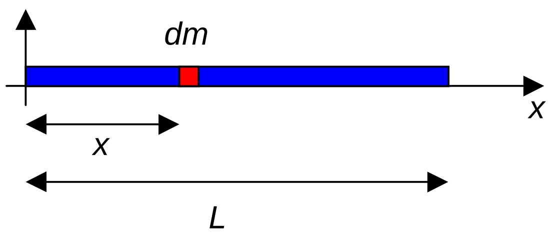
$$\Delta\vec{r}_{CM} = \vec{R}_{CM} - \vec{r}_{CM} = \frac{\Delta m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{r}_2$$

Conclusão: Se uma das partículas aumentar gradualmente a sua massa, o centro de massa gradualmente se moverá de acordo com a equação anterior para $\Delta\vec{r}_{CM}$

Capítulo 9 - Halliday e Resnick - **Edição antiga**	
3A	Calcule o centro de massa de uma haste com uma distribuição uniforme de massa, de comprimento L e massa M .

Vamos considerar um elemento de massa dm de largura dx localizado na posição x . Como a distribuição de massa é uniforme, podemos dizer que:

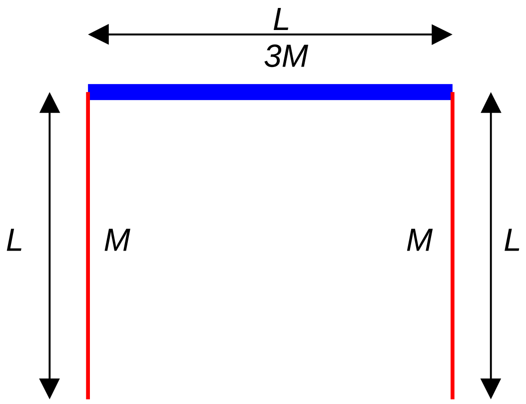
$$\begin{cases} dm \to dx \\ M \to L \end{cases} \Rightarrow dm = \left(\frac{M}{L}\right)dx$$

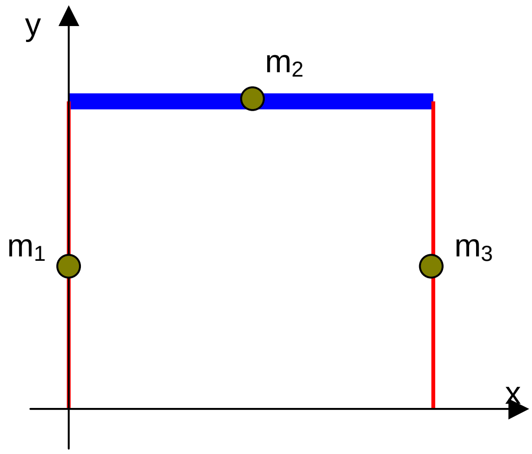


$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\left(\frac{M}{L}dx\right) = \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx = \frac{1}{L}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L$$

$$x_{CM} = \frac{L}{2}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
4	Três barras finas de comprimento L são dispostas em forma de U invertido conforme a figura a seguir. As duas barras laterais têm massa M e a barra central massa 3M. Qual a localização do centro de massa do conjunto?





Para o cálculo do centro de massa desse conjunto as barras se comportam como se as suas massas estivessem concentradas em seus respectivos centros de massa. Escolhendo um sistema de coordenadas, as massas estão nas posições:

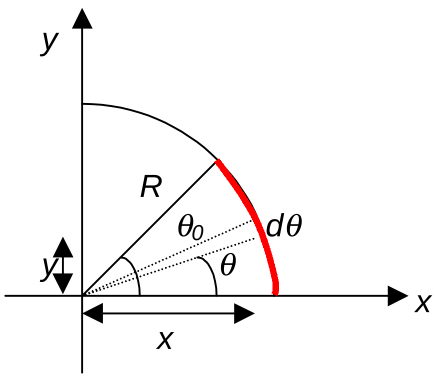
$$\begin{cases} m_1 = M \quad e \quad (0;L/2) \\ m_2 = 3M \quad e \quad (L/2;L) \\ m_3 = M \quad e \quad (L;L/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{CM} = \dfrac{Mx0 + 3MxL/2 + MxL}{M + 3M + M} = \dfrac{L}{2} \\ y_{CM} = \dfrac{MxL/2 + 3MxL + MxL/2}{M + 3M + M} = \dfrac{4L}{5} \end{cases}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick - ***Edição antiga***	
7	Calcule o centro de massa de um fio em forma de arco de raio R , ângulo θ_0 e massa M .

Como definido anteriormente, temos:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$



Considerando que a distribuição de massa no fio é uniforme, podemos encontrar uma relação entre a quantidade infinitesimal de massa dm e o ângulo $d\theta$ que delimita essa massa, usando a proporção a seguir:

$$\begin{cases} dm \rightarrow d\theta \\ M \rightarrow \theta_0 \end{cases} \Rightarrow \quad dm = \frac{M}{\theta_0}d\theta$$

A posição (x , y) de um elemento de massa genérico dm é pode ser expressa como:

$$x = R\, cos\theta$$

$$y = R\, sen\theta$$

Desse modo termos:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^{\theta_0}(R\cos\theta)\left(\frac{M}{\theta_0}d\theta\right) = \frac{R}{\theta_0}\int_0^{\theta_0}\cos\theta\, d\theta = \frac{R}{\theta_0}\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\theta_0} = \frac{R}{\theta_0}\operatorname{sen}\theta_0$$

e de modo equivalente:

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{1}{M}\int_0^{\theta_0}(R\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{M}{\theta_0}d\theta\right) = \frac{R}{\theta_0}\int_0^{\theta_0}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{R}{\theta_0}\cos\theta\Big|_0^{\theta_0} = \frac{R}{\theta_0}(1-\cos\theta_0)$$

A partir desses resultados podemos o centro de massa de outras figuras semelhantes:

i. *Um quarto de círculo* $\theta_0 = \pi/2$ *.*

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{R}{\pi/2}\operatorname{sen}(\pi/2) = \dfrac{2R}{\pi} \\[2ex] y_{CM} = \dfrac{R}{\pi/2}(1-\cos(\pi/2)) = \dfrac{2R}{\pi} \end{cases}$$

ii. *Um semicírculo* $\theta_0 = \pi$*.*

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{R}{\pi}\operatorname{sen}(\pi) = 0 \\[2ex] y_{CM} = \dfrac{R}{\pi}(1-\cos(\pi)) = \dfrac{2R}{\pi} \end{cases}$$

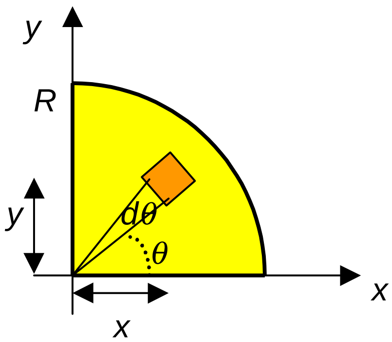
iii. *Um círculo* $\theta_0 = 2\pi$*.*

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{R}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi) = 0 \\[2ex] y_{CM} = \dfrac{R}{2\pi}(1-\cos(2\pi)) = 0 \end{cases}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick - ***Edição antiga***

8 Calcule o centro de massa de um quarto de disco de raio R e massa M.

O centro de massa é definido como:



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

onde o elemento genérico de massa dm está contido em um elemento de área dA no interior do disco e essas grandezas estão relacionadas:

$$\begin{cases} dA & \rightarrow & dm \\ A & \rightarrow & M \end{cases} \quad \therefore \quad dm = \frac{M}{A}dA = \sigma\,dA$$

onde σ é a densidade superficial de massa do disco. Temos ainda que:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\pi R^2}{4} \\ dA = (r\,d\theta)(dr) = r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

Temos então que:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int\int x\,\sigma\,dA = \frac{\sigma}{M}\int_o^R\int_0^{\pi/2}(r\cos\theta)(r\,dr\,d\theta) = \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2 dr\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$$

$$x_{CM} = \frac{\sigma}{M}\left\{\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R\right\}\left\{\left.\text{sen}\theta\right|_0^{\pi/2}\right\} = \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3} = \frac{4M/\pi R^2}{M}\frac{R^3}{3}$$

$$x_{CM} = \frac{4R}{3\pi}$$

De maneira equivalente

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int\int y\,\sigma\,dA = \frac{\sigma}{M}\int_o^R\int_0^{\pi/2}(r\,\text{sen}\theta)(r\,dr\,d\theta) = \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2 dr\int_0^{\pi/2}\text{sen}\theta\,d\theta$$

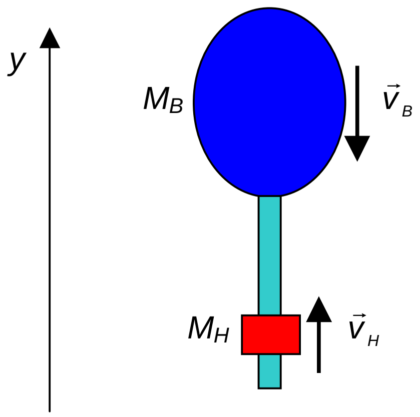
$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\left\{\frac{r^3}{3}\bigg|_0^R\right\}\left\{-\cos\theta\big|_0^{\pi/2}\right\} = \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3} = \frac{4M/\pi R^2}{M}\frac{R^3}{3}$$

$$y_{CM} = \frac{4R}{3\pi}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
15	Um homem de massa M_H está pendurado em uma escada de corda presa a um balão de massa M_B, conforme a figura a seguir. O balão está parado em relação ao solo.

a) Se o homem começar a subir a escada com velocidade v (em relação a escada), em que direção e com que velocidade (em relação à Terra) o balão vai se mover?

$$\begin{cases} \vec{v} = \hat{j}\,v \\ \vec{v}_H = \vec{v}_B + \vec{v} \end{cases}$$



onde V_H é a velocidade do homem em relação ao solo e V_B é a velocidade do balão em relação ao solo.

Como o conjunto *homem + balão* estava inicialmente em repouso, e a resultante das forças externas é nula, temos que:

$$(M_H + M_B)\vec{v}_{CM} = M_H\vec{v}_H + M_B\vec{v}_B = 0$$

ou seja:

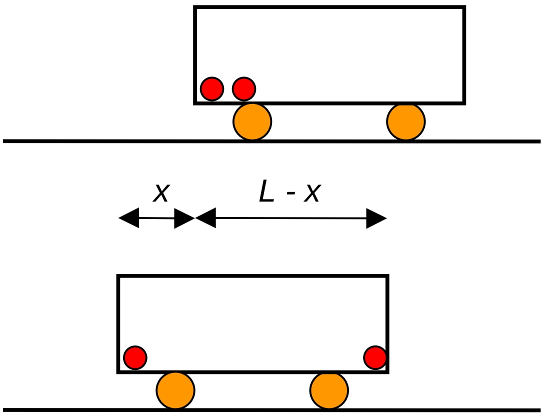
$$M_B\vec{v}_B + M_H(\vec{v}_B + \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_B = -\left(\frac{M_H}{M_H + M_B}\right)\vec{v} = -\hat{j}\left(\frac{M_H}{M_H + M_B}\right)v$$

b) Qual será o movimento depois que o homem parar de subir?

O balão novamente ficará novamente estacionário pois se $v_{CM} = 0$ e $v_H = 0$ teremos que $v_B = 0$.

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
17	Um canhão e um suprimento de balas de canhão se encontram no interior de um vagão fechado de comprimento L, como na figura a seguir. O canhão dispara para a direita; o recuo faz o vagão se mover para a esquerda. As balas disparadas continuam no vagão depois de se chocarem com a parede oposta.

a) Qual a maior distância que o vagão pode ter percorrido depois que todas as balas forem disparadas?



Vamos considerar que existem N balas de canhão de massa m cada, e que são disparadas para a direita com velocidade v_B .
O vagão e o canhão têm conjuntamente uma massa M_T .
Após o disparo de uma bala para a direita o conjunto *vagão + canhão + (N - 1) balas* se deslocam para a esquerda com velocidade v_T .
Inicialmente todo esse aparato estava em repouso, logo a velocidade do centro de massa será nula:

$$[M_T + Nm]\vec{v}_{CM} = [M_T + (N-1)m]\vec{v}_T + m\vec{v}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_T = -\left[\frac{m}{M_T + (N-1)m}\right]\vec{v}_B$$

Pelo desenho podemos notar que após o tiro a bala se deslocou uma distância $L - x$ e como conseqüência do recuo o vagão se deslocou uma distância x . Ou seja:

$$\begin{cases} x = v_T t \\ \\ L - x = v_B t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_T} = \frac{L-x}{v_B} \quad \therefore \quad v_T = \left(\frac{x}{L-x}\right)v_B$$

Usando as duas últimas equações encontramos o valor de x , o deslocamento do vagão para um único tiro de canhão:

$$x = \left(\frac{m}{M_T + Nm}\right)L$$

Depois de N disparos, o vagão terá se deslocado uma distância $d = N\,x$:

$$d = \left(\frac{Nm}{M_T + Nm}\right)L$$

O maior deslocamento possível acontecerá quando a massa total da balas N m for muito maior do que a massa do vagão. Nessa situação teremos que:

$$\text{se} \quad N\,m >> M_T \quad \Rightarrow \quad d = L$$

b) Qual a velocidade do vagão depois que todas as balas forem disparadas?

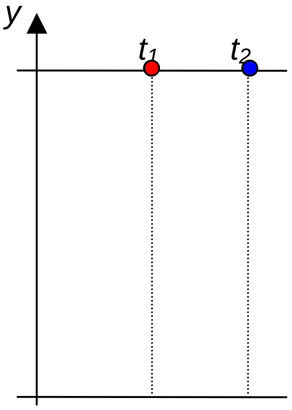
O conjunto *vagão + canhão + balas* voltará ao repouso pois inicialmente esse sistema tinha o centro de massa com velocidade nula.

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

18 Deixa-se cair uma pedra em $t = 0$. Uma segunda pedra com massa duas vezes maior que a da primeira, é largada do mesmo ponto em $t = 100ms$.

a) Onde estará o centro de massa das duas pedras em $t = 300ms$? Suponha que nenhuma das pedras chegou ao chão.

$m_1 = m$ $\Delta t = 100ms = 0{,}1s$
$m_2 = 2m$ $T = 300ms = 0{,}3s$



As equações de movimento das partículas são:

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{g\,t_1^2}{2} = -\dfrac{g\,(t+\Delta t)^2}{2} \\ y_2 = -\dfrac{g\,t_2^2}{2} = -\dfrac{g\,t^2}{2} \end{cases}$$

O centro de massa desse sistema terá a forma:

$$y_{CM}(t) = \frac{m\left[-\dfrac{g\,(t+\Delta t)^2}{2}\right] + 2m\left[-\dfrac{g\,t^2}{2}\right]}{m+2m} = -\frac{g\,(t+\Delta t)^2}{6} - \frac{gt^2}{6}$$

Para $t = 0{,}3s$

$$y_{CM}\,(0{,}3s) = -\,0{,}40\ m$$

b) Qual a velocidade do centro de massa desse sistema nesse momento?

$$v_{CM}(t) = \frac{d\,y_{CM}}{d\,t} = -\frac{1}{3}g\,(2t+\Delta t)$$

$$v_{CM}\,(0{,}3s) = -\,2{,}28 m/s$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

21 Dois sacos de açúcar idênticos são ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma roldana sem atrito, de massa desprezível, com $50mm$ de diâmetro. Os dois sacos estão no mesmo nível e cada um possui originalmente uma massa de $500g$.

a) Determine a posição horizontal do centro de massa do sistema.

Inicialmente os dois sacos estão no mesmo nível, logo

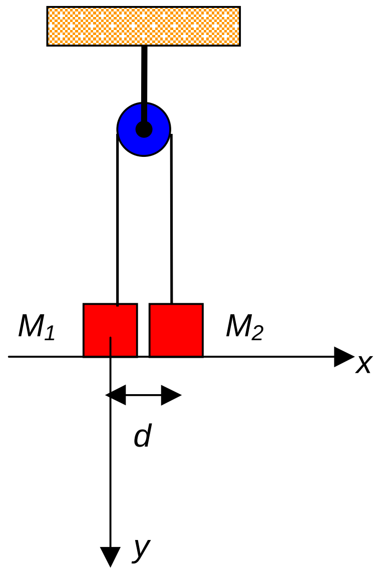
$d = 50mm = 0{,}05m$
$M_1 = M_2 = 500g = 0{,}5kg$

$$y_{CM} = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2} = 0$$

e

$$x_{CM} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 .0 + M_2 d}{M_1 + M_2} = \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right) d$$

$$x_{CM} = 0{,}025m = 25mm$$



b) Suponha que $20g$ de açúcar são transferidos de um saco para outro, mas os sacos são mantidos nas posições originais. Determine a nova posição horizontal do centro de massa.

$m_1 = 0{,}48kg$
$m_2 = 0{,}52kg$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) d = 0{,}026m$$

c) Os dois sacos são liberados. Em que direção se move o centro de massa?

Já foi mostrado anteriormente que os sacos têm, em módulo, a mesma aceleração:

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right) g$$

e elas têm sentido contrários:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = -\hat{j}\, a \\ \vec{a}_2 = +\hat{j}\, a \end{cases}$$

Como:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

encontramos que:

$$\vec{a}_{CM} = \hat{j} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 g$$

Como a aceleração é constante, a velocidade do centro de massa tem a forma:

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_{0CM} + \vec{a}_{CM}\, t = \vec{a}_{CM}\, t$$

pois a velocidade inicial é nula. Desse modo teremos que:

$$\vec{v}_{CM} = \hat{j} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 g\, t$$

e portanto o centro de massa se desloca para baixo.

d) Qual a sua aceleração?

Já foi mostrado que

$$\vec{a}_{CM} = \hat{j}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 g$$

e) Como varia a posição do centro de massa à medida que os sacos se movimentam?

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{v}_{01}t + \frac{\vec{a}_1 t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 = \frac{\vec{a}_1 t^2}{2} \quad \therefore \quad \vec{r}_1 = -\hat{j}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \frac{gt^2}{2}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{v}_{02}t + \frac{\vec{a}_2 t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = \hat{i}d + \frac{\vec{a}_2 t^2}{2} \quad \therefore \quad \vec{r}_2 = \hat{i}d + \hat{j}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \frac{gt^2}{2}$$

Relembrando que:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

encontramos

$$\vec{r}_{CM} = \hat{i}\left(\frac{m_2}{m_2 + m_1}\right)d + \hat{j}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \frac{gt^2}{2}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
22	Um cachorro de *5kg* está em um bote de *20kg* que se encontra a *6m* da margem. Ele anda *2,4m* no barco em direção à margem, e depois pára. O atrito entre o bote e a água é desprezível. A que distância da margem está o cachorro depois da caminhada? Sugestão: O cachorro se move para a esquerda; o bote se desloca para a direita; e o centro de massa do sistema *cachorro + bote* ? Será que ele se move?

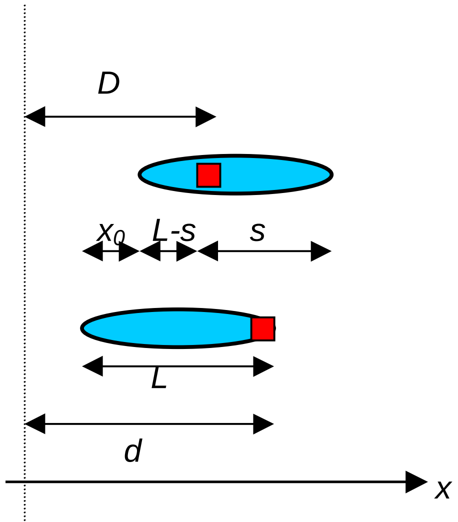
$M_C = 5kg$ $\qquad$ $d = 6m$

$M_B = 20kg$ $\qquad$ $s = 2,4m$

Antes de começar a resolução vamos fazer algumas suposições:

i. O cachorro está na extremidade do bote mais afastada da margem

ii. O bote tem forma simétrica, tal que o centro de massa está localizado no seu centro geométrico.



$$(M_C + M_B)\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{EXT} = 0 \quad \Rightarrow \quad (M_C + M_B)\vec{v}_{CM} = constante$$

Como o conjunto *cachorro + bote* estava inicialmente em repouso, a velocidade do centro de massa era nula e irá permanecer com esse valor pois a resultante das forças externas é zero.

$$(M_C + M_B)\vec{v}_{CM} = M_C\vec{v}_C + M_B\vec{v}_B = 0$$

Antes do cachorro se mover a posição do centro de massa tem a seguinte forma:

$$x_{CM} = \frac{dM_C + (d - L/2)M_B}{M_C + M_B}$$

Depois que ele se moveu, a posição de centro de massa, tem a seguinte forma:

$$x'_{CM} = \frac{[(d-L) + x_0 + (L-s)]M_C + [(d-L) + x_0 + L/2]M_B}{M_C + M_B}$$

Como a velocidade do centro de massa é nula, ele não se moveu e portanto as duas equações anteriores são iguais. Fazendo essa igualdade encontramos que:

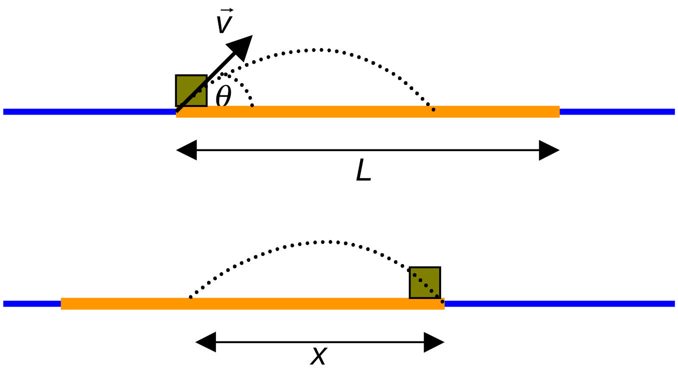
$$(x_0 - s)M_C + x_0 M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0(M_C + M_B) = sM_C \quad \therefore \quad x_0 = \left(\frac{M_C}{M_C + M_B}\right)s = 0{,}48m$$

$$D = (d-L) + x_0 + (L-s) = d + x_0 - s = 4{,}08m$$

Capítulo 9 - Halliday e Resnick - **Edição antiga**

30 Um sapo de massa m está parado na extremidade de uma tábua de massa M e comprimento L. A tábua flutua em repouso sobre a superfície de um lago. O sapo pula em direção à outra extremidade da tábua com uma velocidade v que forma um ângulo θ com a horizontal. Determine o módulo da velocidade inicial do sapo para que ele atinja a outra extremidade da tábua.

Vamos supor que quando o sapo pula, a parte da tábua onde ele estava afunda um pouco, mas volta a boiar, de modo que quando ele tocar na outra extremidade, a tábua já estará na posição horizontal.



Como o conjunto estava em repouso, a velocidade do centro de massa é nula.

O sapo salta para direita e a tábua se move para esquerda com velocidade V.

$$(m + M)v_{CM} = 0 = mv\cos\theta - MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{mv\cos\theta}{M}$$

O sapo irá permanecer no ar um tempo t, e portanto o tempo de subida será metade desse tempo de vôo, logo:

$$v_M = v\,\text{sen}\theta - g\left(\frac{t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v\,\text{sen}\theta}{g}$$

Desse modo, o deslocamento horizontal x do sapo, será:

$$x = (\, v\cos\theta\,)\, t$$

e o deslocamento horizontal da tábua $L - x$, será:

$$L - x = Vt = \left(\frac{mv\cos\theta}{M}\right)t$$

ou seja:

$$L = (v\cos\theta)t + \frac{m}{M}(v\cos\theta)t = \left(1 + \frac{m}{M}\right)(v\cos\theta)t = \left(1 + \frac{m}{M}\right)(v\cos\theta)\frac{2v\,\text{sen}\theta}{g}$$

$$L = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\text{sen}\,2\theta$$

ou seja:

$$v = \sqrt{\frac{gL}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\text{sen}\,2\theta}}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

34 Dois blocos de massas $1kg$ e $3kg$ respectivamente, ligados por uma mola, estão em repouso em uma superfície sem atrito. Em um certo instante são projetados um na direção do outro de tal forma que o bloco de $1kg$ viaja inicialmente com uma velocidade de $1,7m/s$ em direção ao centro de massa, que permanece em repouso. Qual a velocidade inicial do outro bloco?

$M_1 = 1kg$
$M_2 = 3kg$
$v_1 = 1,7m/s$

De maneira geral temos que:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{EXT}$$

A partir da equação anterior temos que quando a resultante das forças externas for nula a velocidade do centro de massa será constante. Mas como os blocos estavam inicialmente em repouso, a velocidade do centro de massa será nula:

$$M\vec{v}_{CM} = M_1\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2 = 0$$

ou seja:

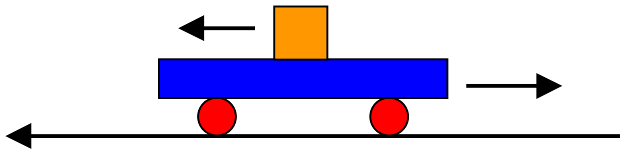
$$\vec{v}_2 = -\frac{M_1}{M_2}\vec{v}_1$$

Mas $\vec{v}_1 = \hat{i}\,1{,}7 m/s$, logo

$$\vec{v}_2 = -\hat{i}\frac{3}{1}1{,}7 \quad \therefore \quad \vec{v}_2 = -\hat{i}\,5{,}1 m/s$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
37	Uma vagão plataforma de peso P pode rolar sem atrito em um trecho reto e plano da linha férrea. Inicialmente, um homem de peso p está de pé no carro, que se move para a esquerda com velocidade v_0 . Qual a variação da velocidade do vagão quando o homem corre para a esquerda com uma velocidade v_{REL} em relação ao vagão?

M = P/g
m = p/g



O momento inicial do conjunto é:

$$\vec{P}_I = (m + M)\vec{v}_0$$

Vamos considerar o homem passe a ter uma velocidade $\hat{i}v$ e que o vagão passe a ter uma velocidade $\hat{i}V$. O momento final do sistema será:

$$\vec{P}_F = M\vec{V} + m\vec{v}$$

Mas a velocidade do homem em relação ao vagão, ou seja a velocidade relativa é definida de tal modo que:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_{REL}$$

ou seja:

$$\vec{P}_F = M\vec{V} + m\left(\vec{V} + \vec{v}_{REL}\right)$$

Considerando que quando a resultante das forças externas for nula o momento total deste sistema se conserva, temos que:

$$(m + M)\vec{v}_0 = M\vec{V} + m\left(\vec{V} + \vec{v}_{REL}\right) = (m + M)\vec{V} + m\vec{v}_{REL}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{V} + \frac{m}{m + M}\vec{v}_{REL}$$

$$\Delta\vec{V} = \vec{V} - \vec{v}_0 = -\frac{m}{m + M}\vec{v}_{REL} = -\frac{p}{p + P}\vec{v}_{REL}$$