

Notas de Aula de Física

11. ROTAÇÃO	2
AS VARIÁVEIS DA ROTAÇÃO.....	2
<i>Posição angular</i>	2
<i>Deslocamento angular</i>	2
<i>Velocidade angular</i>	3
<i>Aceleração angular</i>	3
ROTAÇÃO COM ACELERAÇÃO ANGULAR CONSTANTE	3
AS VARIÁVEIS LINEARES E ANGULARES	4
<i>A posição</i>	4
<i>A velocidade escalar</i>	4
<i>A aceleração</i>	4
ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO.....	5
MOMENTO DE INÉRCIA.....	5
<i>Teorema dos eixos paralelos</i>	6
<i>Alguns exemplos de cálculo de momento de inércia</i>	7
TORQUE	10
A SEGUNDA LEI DE NEWTON PARA A ROTAÇÃO.....	11
TRABALHO, POTÊNCIA, E O TEOREMA DO TRABALHO - ENERGIA CINÉTICA.....	12
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	13
02	13
10.....	13
12.....	14
23.....	14
34.....	15
40.....	15
42.....	16
51.....	17
73.....	18
74.....	19
75.....	19
81.....	20

11. Rotação

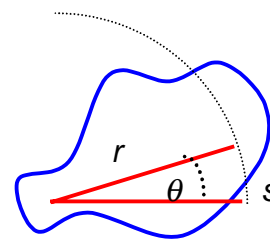
A cinemática dos corpos rígidos trata dos movimentos de translação e rotação. No *movimento de translação pura* todas as partes de um corpo sofrem o mesmo deslocamento linear. Por outro lado, no movimento de *rotação pura* as partes de um corpo descrevem trajetórias circulares cujos centros situam-se sobre uma mesma reta - chamada de eixo de rotação. No *movimento de rotação pura* todas as partes de um corpo sofrem o mesmo deslocamento angular. *O movimento que se aproxima mais de uma situação real é aquele que incorpora tanto a translação quanto a rotação.*

As variáveis da rotação

À semelhança do movimento de translação, para a análise da rotação utilizamos de parâmetros equivalentes a aqueles definidos anteriormente.

Posição angular

Quando um objeto de um formato arbitrário, tem uma trajetória circular em torno de um certo eixo, podemos definir algumas grandezas que descreverão esse movimento. Podemos marcar um dado ponto do objeto e analisar o seu movimento. A distância deste ponto ao eixo de rotação é chamado de raio r da trajetória. A sua trajetória descreve um arco de comprimento s . A posição angular associada ao arco e o raio é o ângulo θ .

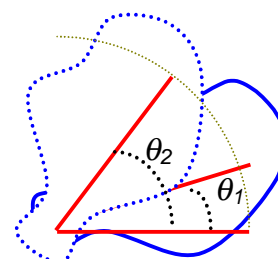


$$s = r\theta \quad \therefore \quad \theta = \frac{s}{r}$$

Deslocamento angular

Quando um corpo está em rotação, ele está variando a sua posição angular de modo que num dado momento ela é definida pelo ângulo θ_1 e num instante posterior é definida pelo ângulo θ_2 , de modo que o deslocamento angular entre os instantes considerados é:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$



Velocidade angular

A velocidade angular é a taxa com que a posição angular está variando; é a razão entre o deslocamento angular e o tempo necessário para fazer esse deslocamento.

Definimos a *velocidade angular média* como:

$$\bar{w} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Definimos a *velocidade angular instantânea* como:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleração angular

Quando a velocidade angular de um corpo não é constante mas varia no tempo com uma certa taxa, esse corpo terá uma aceleração angular.

Definimos a *aceleração angular média* como:

$$\bar{\alpha} = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

Definimos a *aceleração angular instantânea* como:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}$$

Rotação com aceleração angular constante

À semelhança do movimento de translação com aceleração constante, as equações para rotação são obtidas integrando-se a equação de movimento:

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \text{constante}$$

$$\int dw = w_0 + \alpha \int dt \Rightarrow w = w_0 + \alpha t \quad (1)$$

e também:

$$w = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int d\theta = \theta_0 + \int w dt = \theta_0 + \int (w_0 + \alpha t) dt$$

ou seja:

$$\theta = \theta_0 + w_0 \int dt + \alpha \int dt \Rightarrow \theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (2)$$

A velocidade angular média foi definida de modo que:

$$\bar{w} = \frac{\theta - \theta_0}{t} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \bar{w} t$$

mas quando estamos analisando o movimento com aceleração constante, também podemos definir a velocidade angular média como:

$$\bar{w} = \frac{w + w_0}{2}$$

e usando essa equação na anterior, temos que:

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{w + w_0}{2} \right) t = \theta_0 + \left(\frac{w + w_0}{2} \right) \left(\frac{w - w_0}{\alpha} \right)$$

ou seja:

$$w^2 = w_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (3)$$

As variáveis lineares e angulares

A posição

Ao analisarmos o movimento de rotação de um objeto o parâmetro que descreve o deslocamento espacial é

$$s = r \theta$$

A velocidade escalar

Quando observamos os corpos rígidos, a rotação se faz com raio constante, ou seja: cada ponto observado mantém uma distância constante ao eixo de rotação. Desse modo:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r w$$

onde v é a velocidade linear de um certo ponto do corpo e w é a velocidade angular desse ponto considerado. Na realidade, w é a velocidade angular do corpo por inteiro.

A aceleração

De maneira equivalente, a aceleração de uma dado ponto de um corpo é definida como:

$$a = \frac{dv}{dt} = r \frac{dw}{dt} \Rightarrow a = r \alpha$$

Essa aceleração é também conhecida como aceleração tangencial, pois dá conta da variação do módulo da velocidade. Como a velocidade é tangencial à curva, para que o seu módulo varie é necessário uma aceleração nesta direção.

Com a definição dessa aceleração, temos agora dois tipos de aceleração no movimento circular: a aceleração tangencial e a aceleração radial (ou centrípeta), ou seja:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a_T = \alpha r \\ a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \end{cases}$$

Energia cinética de rotação

Vamos considerar um conjunto de N partículas, cada uma com massa m_i e velocidade \vec{v}_i girando em torno de um mesmo eixo do qual distam r_i . A energia cinética deste sistema é:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

onde r_i é a distância de cada partícula ao eixo, ω a velocidade angular das partículas em torno do eixo considerado e definimos o momento de inércia I do conjunto de partículas como:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

Vamos usar a definição de momento inércia principalmente para calcular a energia cinética de rotação de corpos rígidos. Quando uma roda está girando em torno do seu eixo, as diversas partes da roda se movem com velocidades diferentes, mas todas as suas partes têm a mesma velocidade angular. Daí a importância da definição do momento de inércia para computar a energia cinética associada ao movimento de rotação de um sistema de partículas ou um corpo rígido.

Momento de inércia

Se dividirmos um corpo rígido em pequenas partes, cada parte com uma massa Δm_i , podemos em tese calcular o momento de inércia deste corpo usando a equação anteriormente apresentada para um sistema de partículas:

$$I = \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i$$

Se aumentarmos essa subdivisão de modo que aqueles elementos de massa Δm_i se transformem em grandezas diferenciais dm , poderemos identificar como:

$$I = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

onde essa é uma integral simbólica que significa a integração sobre todo o volume do corpo rígido considerado, seja ele de uma, duas ou três dimensões.

Teorema dos eixos paralelos

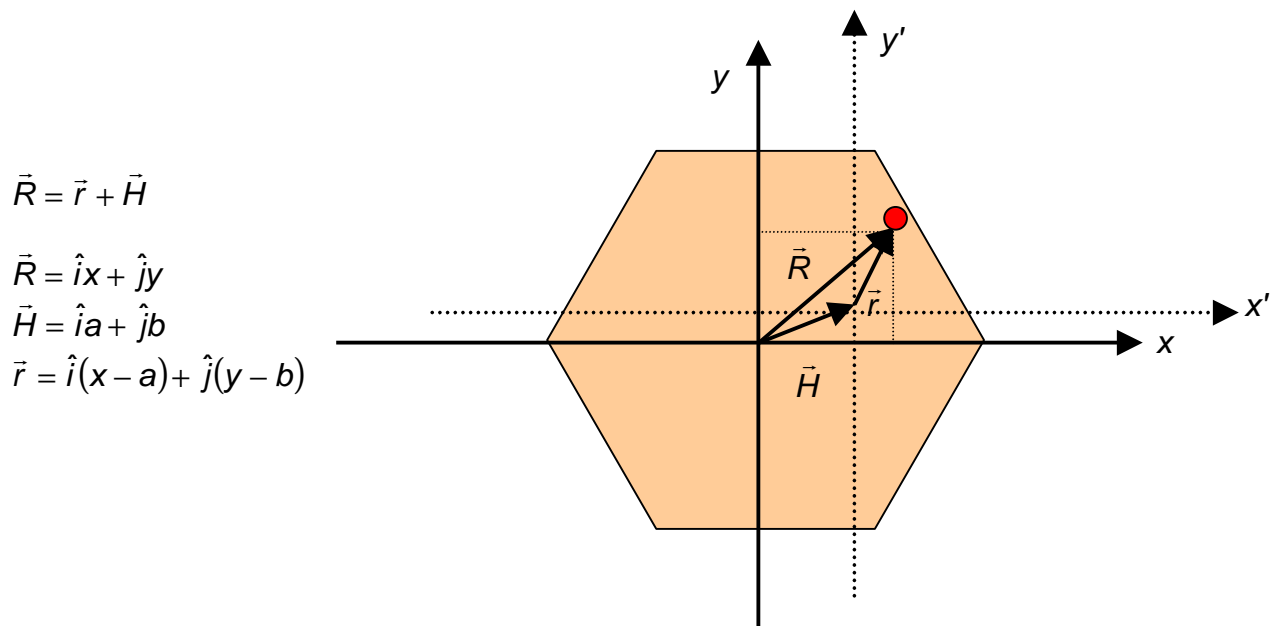
Se conhecermos o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer que passe por seu centro de massa, podemos inferir o momento de inércia desse corpo em relação a qualquer eixo paralelo ao primeiro eixo considerado. Se a distância entre os dois eixos for H , a massa do corpo for M e I_{CM} for o seu momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, teremos o momento de inércia I mencionado:

$$I = I_{CM} + M H^2$$

Para demonstrar essa equação vamos considerar um corpo de um formato qualquer, como no desenho a seguir. O momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao papel, que cruza com a origem do referencial (xy) e que passa pelo centro de massa é I_{CM}

$$I_{CM} = \int R^2 dm$$

onde dm é um elemento de massa (representado pelo pequeno círculo) localizado pelo vetor posição \vec{R} .



$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{H}$$

$$\vec{R} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\vec{H} = \hat{i}a + \hat{j}b$$

$$\vec{r} = \hat{i}(x-a) + \hat{j}(y-b)$$

Para calcular o outro momento de inércia vamos considerar um segundo referencial $(x'y')$ e um segundo eixo que passe pela origem desse referencial e seja perpendicular ao papel. O momento de inércia em relação a esse segundo eixo é:

$$I = \int r^2 dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm = \int [(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) - 2(ax + by)] dm$$

Mas

$$\int (x^2 + y^2) dm = \int R^2 dm = I_{CM}$$

$$\int (a^2 + b^2) dm = \int H^2 dm = MH^2$$

$$\int 2ax dm = 2a \int x dm = 2a X_{CM} M = 0$$

$$\int 2by dm = 2b \int y dm = 2b Y_{CM} M = 0$$

onde nas duas últimas equações utilizamos a premissa inicial que o centro de massa seria escolhido como origem do referencial, e desse modo $X_{CM} = Y_{CM} = 0$.

Coletando os resultados das últimas equações, encontramos que:

$$I = I_{CM} + M H^2$$

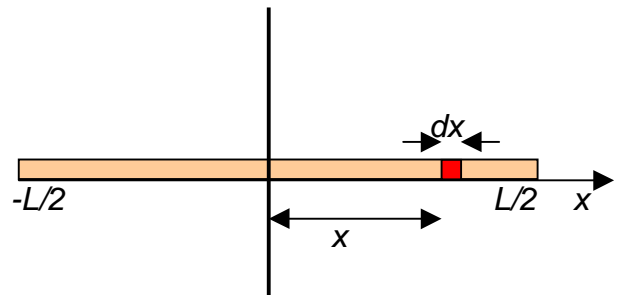
Alguns exemplos de cálculo de momento de inércia

- a. *Momento de inércia de um bastão fino de massa M e comprimento L em relação a um eixo perpendicular ao bastão e que passa por seu centro de massa.*

$$I = \int r^2 dm$$

Vamos considerar a fatia dx , distante x da origem, que contém uma massa dm . Podemos usar a proporção:

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \Rightarrow dm = \left(\frac{M}{L}\right) dx$$



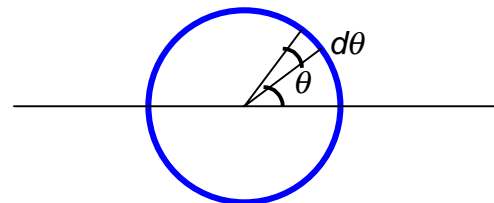
$$I = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{ML^2}{12}$$

- b. *Momento de inércia de um anel de raio R e massa M , em relação a um eixo que passa pelo centro, perpendicular ao plano do anel.*

$$I = \int r^2 dm$$

Vamos considerar o pedaço de anel limitado pelo ângulo $d\theta$, que contém uma

Vamos considerar o pedaço de anel limitado pelo ângulo $d\theta$, que faz um ângulo θ com a horizontal e que contém uma massa dm . Podemos usar a proporção:



Anel de raio R

$$\frac{dm}{M} = \frac{d\theta}{2\pi} \Rightarrow dm = \left(\frac{M}{2\pi}\right) d\theta$$

$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} R^2 \left(\frac{M}{2\pi} d\theta \right) = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \quad \therefore I = MR^2$$

- c. *Momento de inércia de um anel de raio R e massa M , em relação a um eixo que passa por um diâmetro qualquer.*

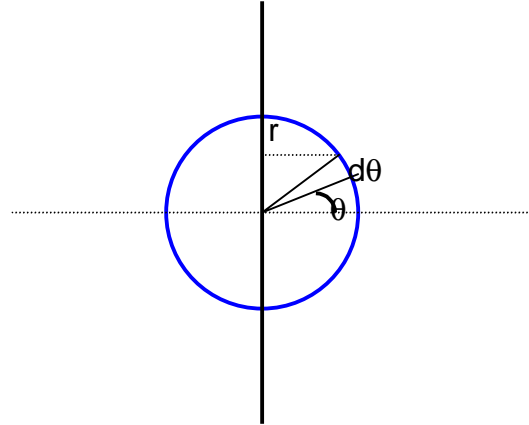
$$I = \int r^2 dm$$

A distância r de um elemento de massa dm ao eixo é:

$$r = R \cos \theta$$

O elemento de massa dm e o ângulo $d\theta$ que limita essa massa se relacionam como:

$$\frac{dm}{M} = \frac{d\theta}{2\pi} \Rightarrow dm = \left(\frac{M}{2\pi} \right) d\theta$$



Anel de raio R

$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} (R \cos \theta)^2 \left(\frac{M}{2\pi} d\theta \right) = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

Mas

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \Rightarrow I = \frac{MR^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right\}$$

ou seja

$$I = \frac{MR^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} \right\} = \frac{MR^2}{2\pi} \{ \pi \} \quad \therefore I = \frac{MR^2}{2}$$

- d. *Momento de inércia de um cilindro anular em torno do eixo central.*

O cilindro tem raio interno R_1 , raio externo R_2 , comprimento L e massa M .

$$I = \int r^2 dm$$

Vamos considerar uma casca cilíndrica de raio r , espessura dr e comprimento L . O volume dV dessa casca é

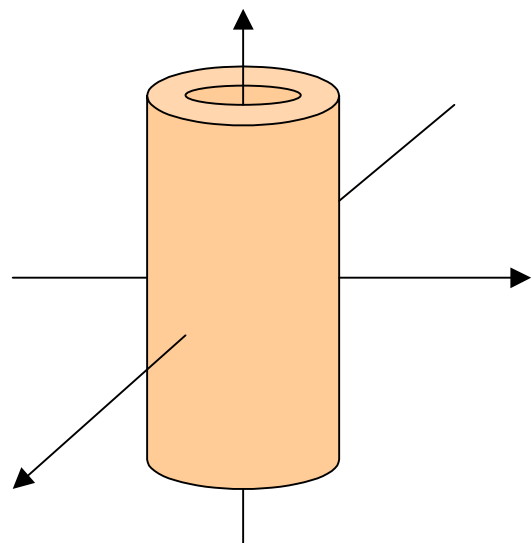
$$dV = (2\pi r L) dr$$

A massa dm contida nessa casca é:

$$dm = \rho dV$$

logo

$$dm = 2\pi L \rho r dr$$



$$I = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 [2\pi L \rho r dr] = 2\pi \rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi \rho L \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}$$

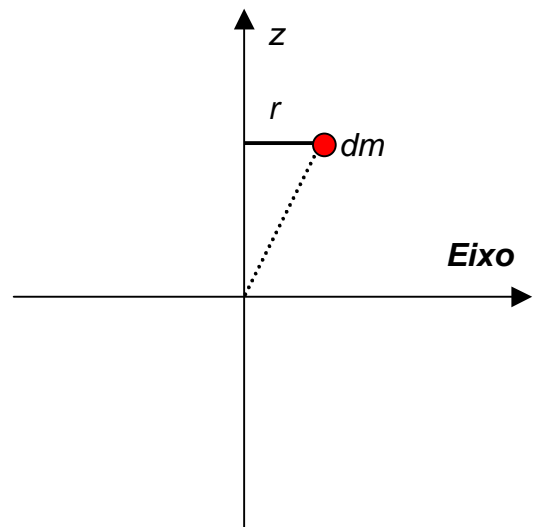
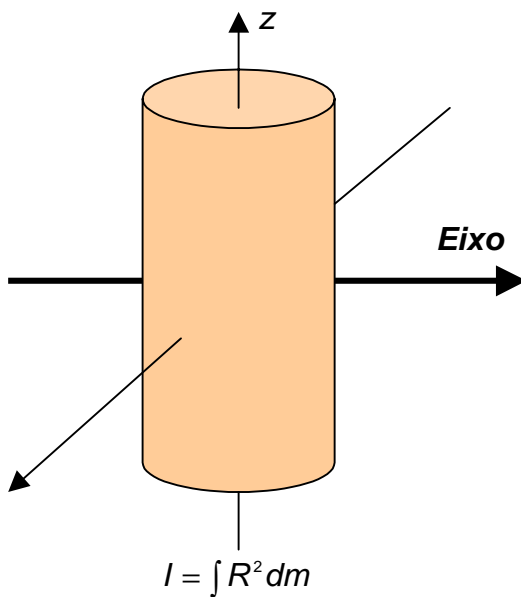
Mas

$$V = \pi L(R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi L(R_2^2 - R_1^2)}$$

então

$$I = \pi L \frac{R_2^4 - R_1^4}{2} \frac{M}{\pi L(R_2^2 - R_1^2)} \Rightarrow I = \frac{M}{2}(R_2^2 + R_1^2)$$

e. *Momento de inércia de um cilindro sólido de massa M , raio a e comprimento L em relação ao diâmetro central*



$$dm = \rho dV = \frac{M}{V} dV = \frac{M}{\pi a^2 L} dV$$

O elemento de massa dm está limitado pelo ângulo $d\theta$ e dista R do eixo, que no desenho está na horizontal.

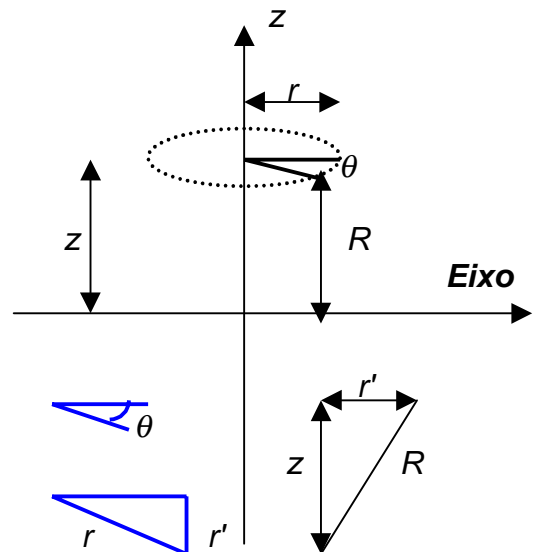
$$R^2 = r'^2 + z^2$$

$$r' = r \sin \theta$$

$$dV = (r d\theta)(dr)(dz)$$

$$I = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^a \int_0^{2\pi} (r'^2 + z^2) [\rho(r d\theta dr dz)]$$

$$I = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-L/2}^{+L/2} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) dz = \rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr \int_{-L/2}^{+L/2} dz + \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-L/2}^{+L/2} z^2 dz$$



Mas

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

logo

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} 2\pi - \frac{1}{2} 2 \text{sen} 2\theta \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

ou seja:

$$I = \rho(\pi) \left(\frac{a^4}{4} \right) (L) + \rho(2\pi) \left(\frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \frac{L^3}{4} \right) = \frac{\rho\pi L a^4}{4} + \frac{\rho\pi a^2 L^3}{12}$$

$$I = \rho\pi a^2 L \left(\frac{a^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right) \Rightarrow I = \frac{M a^2}{4} + \frac{M L^2}{12}$$

Torque

Define-se o torque $\vec{\tau}$ produzido pela força \vec{F} quando ela atua sobre uma partícula como sendo o produto vetorial dessa força pelo vetor posição da partícula:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Se no exemplo da figura ao lado definirmos o plano da folha de papel com sentido $x - y$ o torque estará ao longo do eixo z e será um vetor saindo da folha

- ⊙ *Convenção para simbolizar um vetor saindo perpendicular à folha.*
- ⊗ *Convenção para simbolizar um vetor entrando perpendicular à folha.*

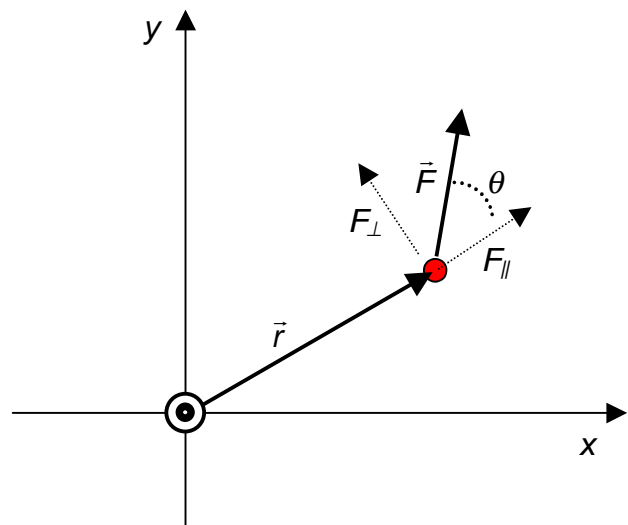
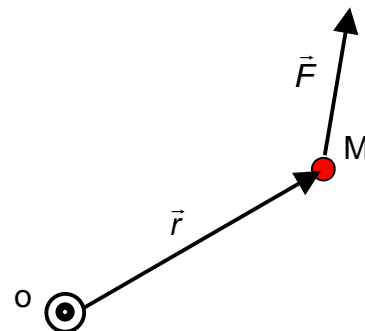
Nesse exemplo ao lado, em particular, o resultado do produto vetorial é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \hat{k}(r F \text{sen} \theta)$$

onde

$$\tau = r F \text{sen} \theta = r F_{\perp}$$

Podemos perceber que apenas a componente F_{\perp} da força \vec{F} é quem contribui para o torque.



Podemos visualizar o resultado do produto vetorial de uma maneira equivalente à anterior, ou seja:

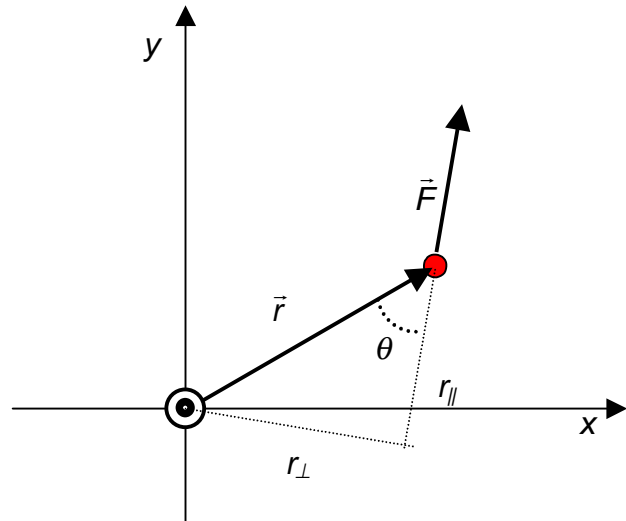
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \hat{k}(r F \sin \theta)$$

onde

$$\tau = r F \sin \theta = r_{\perp} F$$

r_{\perp} = braço de alavanca

r_{\parallel} = linha de ação



A segunda Lei de Newton para a rotação

A segunda Lei de Newton toma uma forma peculiar quando aplicada aos movimentos que envolvem rotação. Se fizermos a decomposição da força aplicada a uma partícula segundo as suas componentes perpendicular e paralela ao vetor posição dessa partícula, teremos:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$F_{\parallel} = m a_{\parallel}$$

e

$$F_{\perp} = m a_{\perp}$$

Mas, quando consideramos o torque associado a essa força, temos:

$$\tau = r F_{\perp} = m r a_{\perp} = m r (r \alpha) = (m r^2) \alpha$$

e o torque toma a forma:

$$\tau = I \alpha$$

onde I é o momento de inércia da partícula considerada.

Se tivermos N partículas girando em torno de um eixo cada uma delas sob a ação de uma força, teremos um torque associado à essa força, onde:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \tau_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Mas

$$\tau = \sum r_i F_{i\perp} = \sum r_i m_i a_{i\perp} = \sum r_i m_i (r_i \alpha) = \sum (m_i r_i^2) \alpha$$

$$\tau = I \alpha$$

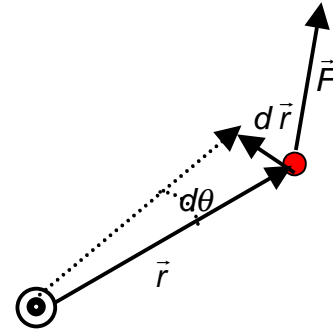
Trabalho, potência, e o teorema do trabalho - energia cinética

Para calcular o trabalho elementar dW executado por uma força \vec{F} temos que:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_{\perp} dr = F_{\perp} r d\theta$$

$$dW = \tau d\theta$$

$$W_{if} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$



Mas

$$\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt}$$

e

$$\tau d\theta = \left(I \frac{d\omega}{dt} \right) d\theta = (I d\omega) \frac{d\theta}{dt} = I \omega d\omega$$

ou seja:

$$W_{if} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = I \int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega d\omega = I \frac{\omega^2}{2} \Big|_{\omega_i}^{\omega_f} \Rightarrow W_{if} = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = K_f - K_i$$

Para calcular a potência P associada à atuação da força \vec{F} , devemos considerar que:

$$dW = \tau d\theta$$

e também que:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow P = \tau \omega$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

02 Durante um intervalo de tempo t , a turbina de um gerador gira um ângulo $\theta = a t + b t^3 - c t^4$, onde a , b e c são constantes.

a) Determine a expressão para sua velocidade angular.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = a + 3bt^2 - 4ct^3$$

b) Determine a expressão para sua aceleração angular.

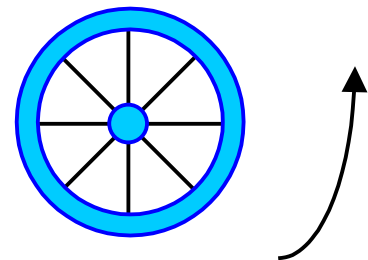
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 6bt - 12ct^2$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

10 Uma roda tem oito raios de 30cm . Está montada sobre um eixo fixo e gira a $2,5\text{rev/s}$. Você pretende atirar uma flecha de 20cm de comprimento através da roda, paralelamente ao eixo, sem que a flecha colida com qualquer raio. Suponha que tanto a flecha quanto os raios são muito finos.

a) Qual a velocidade mínima que a flecha deve ter?

$$\begin{aligned} r &= 30\text{cm} = 0,30\text{m} \\ \omega &= 2,5\text{rev/s} = 2,5 \cdot 2\pi\text{rad/s} \\ L &= 20\text{cm} = 0,20\text{m} \end{aligned}$$



A flecha vai atravessar a roda usando as "fatias" de vazio entre dois raios. A distância angular entre dois raios é de $2\pi/8$ radianos.

Quando a roda gira, os raios se movem e depois de um certo tempo t_0 um raio passa a ocupar a posição do raio adjacente. Nesse tempo, cada raio "varre" totalmente o espaço entre a sua posição inicial e a posição do raio adjacente e nesse movimento se desloca de $\theta_0 = 2\pi/8$ radianos. É precisamente esse tempo que dispõe a flecha para atravessar a roda.

$$\theta_0 = \omega t_0 \quad \therefore \quad t_0 = \frac{\theta_0}{\omega}$$

A flecha tem comprimento L , e dispõe de um tempo t_0 para atravessar a roda, logo:

$$L = v t_0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{L}{t_0} = \frac{L\omega}{\theta_0} = 4,0\text{m/s}$$

- b) A localização do ponto em que você mira, entre o eixo e a borda, tem importância? Em caso afirmativo, qual a melhor localização?

Não tem importância a distância do eixo onde se mira, pois sempre teremos disponível o mesmo ângulo. Se perto da borda dispomos de um espaço linear maior, mas a velocidade linear da roda também é maior. Se mirarmos perto do eixo teremos um espaço linear menor, mas a velocidade linear da roda também é menor. Em suma, a velocidade angular é a mesma para todos os pontos.

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

12 Um prato de toca-discos, rodando a $33 \frac{1}{3} \text{ rev/min}$, diminui e pára 30s após o motor ser desligado.

- a) Determine a sua aceleração angular (uniforme) em rev/min^2 .

$$\begin{aligned} w_0 &= 33,33 \text{ rev/min} \\ t &= 30 \text{ s} = 0,5 \text{ min} \\ w &= 0 \end{aligned}$$

$$w = w_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{w - w_0}{t} = -\frac{w_0}{t} = -66,66 \text{ rev/min}^2$$

- b) Quantas revoluções o motor realiza neste intervalo?

$$\theta = w_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} = 8,33 \text{ rev}$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

23 Um disco gira em torno de um eixo fixo, partindo do repouso, com aceleração angular constante, até alcançar a rotação de 10 rev/s . Depois de completar 60 revoluções, a sua velocidade angular é de 15 rev/s .

$$\begin{aligned} w_0 &= 0 & \theta_2 &= 60 \text{ rev} \\ w_1 &= 10 \text{ rev/s} & w_2 &= 15 \text{ rev/s} \end{aligned}$$

- a) Calcule a aceleração angular.

$$w_2^2 = w_1^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow \alpha = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2\theta} = 1,02 \text{ rev/s}^2$$

- b) Calcule o tempo necessário para completar as 60 revoluções.

$$w_2 = w_1 + \alpha t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{w_2 - w_1}{\alpha} = 4,80 \text{ s}$$

c) Calcule o tempo necessário para alcançar a rotação de 10rev/s .

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\alpha} = 9,61\text{s}$$

d) Calcule o número de revoluções desde o repouso até a velocidade de 10rev/s .

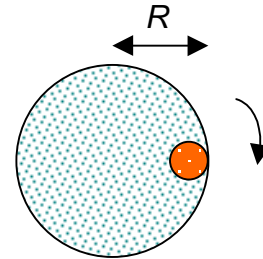
$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = 48,07\text{rev}$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

34 Uma certa moeda de massa M é colocada a uma distância R do centro de um prato de um toca discos. O coeficiente de atrito estático é μ_E . A velocidade angular do toca discos vai aumentando lentamente até ω_0 , quando, neste instante, a moeda escorrega para fora do prato. Determine ω_0 em função das grandezas M , R , g e μ_E .

$$\vec{F}_a + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} P - N = 0 \\ F_a = ma \end{cases}$$



$$F_a = \mu_E N = \mu_E m g \Rightarrow a = \mu_E g$$

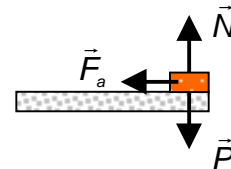
Mas

$$ma = m \frac{v^2}{R} = m \frac{(\omega_0 R)^2}{R} = m \omega_0^2 R$$

ou seja:

$$a = \omega_0^2 R = \mu_E g$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_E g}{R}}$$

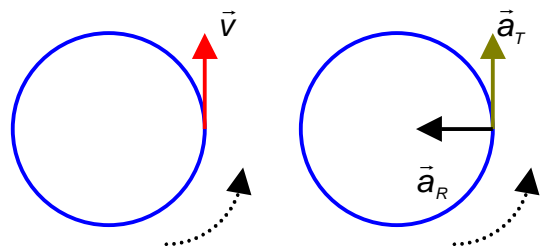


Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

40 Um carro parte do repouso e percorre uma trajetória circular de 30m de raio. Sua velocidade aumenta na razão constante de $0,5\text{m/s}^2$.

a) Qual o módulo da sua aceleração linear *resultante*, depois de 15s ?

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a_T = \alpha r \\ a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \end{cases}$$



$$a_T = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{1}{60} = 0,0166 \text{ rad/s}^2 \quad a_T = 0,5 \text{ m/s}^2$$

$$a_R = \omega^2 r = (\omega_0 + \alpha t)^2 r = 1,875 \text{ m/s}^2 \quad \omega_0 = 0$$

$$t = 15 \text{ s}$$

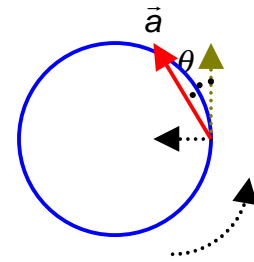
$$r = 30 \text{ m}$$

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_T^2} = 1,94 \text{ m/s}^2$$

- b) Que ângulo o vetor aceleração resultante faz com o vetor velocidade do carro nesse instante?

$$\tan \theta = \frac{a_R}{a_T} = 3,75$$

$$\theta = 75,06^\circ$$



Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

42 Quatro polias estão conectadas por duas correias conforme mostrado na figura a seguir. A polia A ($r_A = 15 \text{ cm}$) é a polia motriz e gira a 10 rad/s . A polia B ($r_B = 10 \text{ cm}$) está conectada à A pela correia 1. A polia B' ($r_{B'} = 5 \text{ cm}$) é concêntrica à B e está rigidamente ligada à ela. A polia C ($r_C = 25 \text{ cm}$) está conectada à polia B' pela correia 2.

- a) Calcule a velocidade linear de um ponto na correia 1.

$$\omega_A = 10 \text{ rad/s}$$

$$r_A = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$$

$$r_B = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$$

$$r_{B'} = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

$$r_C = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$$

$$v_A = \omega_A r_A = 10 \cdot 0,15 = 1,5 \text{ m/s}$$

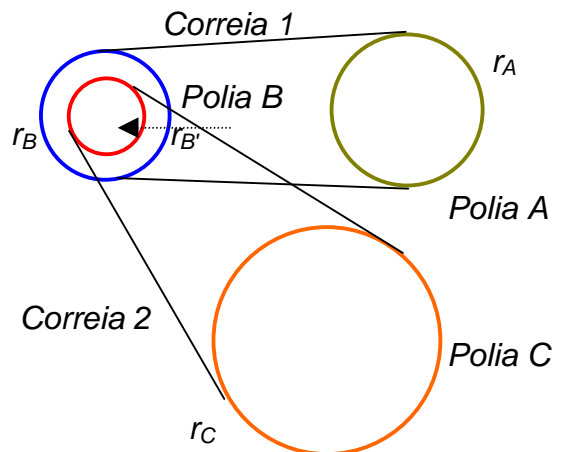
- b) Calcule a velocidade angular da polia B.

$$v_A = v_B = \omega_B r_B$$

$$\omega_B = \frac{v_A}{r_B} = \omega_A \frac{r_A}{r_B} = 15 \text{ rad/s}$$

- c) Calcule a velocidade angular da polia B'.

$$\omega_{B'} = \omega_B = 15 \text{ rad/s}$$



d) Calcule a velocidade linear de um ponto na correia 2.

$$v_{B'} = \omega_{B'} r_{B'} = \omega_B r_{B'} = 15 \cdot 0,05 = 0,75 \text{ m/s}$$

e) Calcule a velocidade angular da polia C.

$$v_{B'} = v_C = \omega_C r_C \Rightarrow \omega_C = \frac{v_{B'}}{r_C} = \frac{\omega_B r_{B'}}{r_C} = 3 \text{ rad/s}$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

51

Duas partículas de massa m cada uma, estão ligadas entre si e a um eixo de rotação em O , por dois bastões delgados de comprimento L e massa M cada um, conforme mostrado na figura a seguir. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular ω .

a) Determine algebricamente a expressão para o momento de inércia do conjunto em relação a O .

Já foi calculado anteriormente que o momento de inércia de um bastão fino de massa M e comprimento L em relação a um eixo perpendicular ao bastão e que passa por seu centro de massa, vale $ML^2/12$.

Por outro lado, o teorema dos eixos paralelos diz que: se a distância entre os dois eixos for H , a massa do corpo for M e I_{CM} for o seu momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, teremos o momento de inércia I mencionado:

$$I = I_{CM} + M H^2$$

Vamos calcular o momento de inércia de cada componente desse conjunto:

I_1 = Momento de inércia da partícula mais afastada.

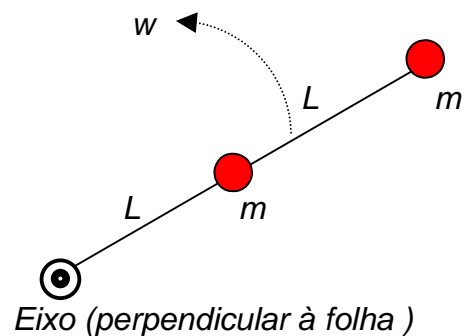
$$I_1 = M (2L)^2 = 4 m L^2$$

I_2 = Momento de inércia do bastão mais afastado. A distância do centro de massa desse bastão até o eixo vale $3L/2$, logo:

$$I_2 = \frac{ML^2}{12} + M \left(\frac{3L}{2} \right)^2 = \frac{28}{12} ML^2$$

I_3 = Momento de inércia da partícula mais próxima.

$$I_3 = M (L)^2 = m L^2$$



I_4 = Momento de inércia do bastão mais próximo. A distância do centro de massa desse bastão até o eixo vale $L/2$, logo:

$$I_4 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{4}{12}ML^2$$

Finalmente:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4mL^2 + \frac{28}{12}ML^2 + mL^2 + \frac{4}{12}ML^2$$

$$I = 5mL^2 + \frac{8}{3}ML^2$$

- b) Determine algebricamente a expressão para a energia cinética de rotação do conjunto em relação a O .

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \left(\frac{5}{2}m + \frac{4}{3}M\right)\omega^2 L^2$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

73

Numa máquina de Atwood, um bloco tem massa $500g$ e o outro $460g$. A polia, que está montada sobre um suporte horizontal sem atrito, tem um raio de $5cm$. Quando ela é solta, o bloco mais pesado cai $75cm$ em $5s$. A corda não desliza na polia.

- a) Qual a aceleração de cada bloco?

$$\begin{aligned} m_1 &= 500g = 0,5kg & v_0 &= 0 \\ m_2 &= 460g = 0,46kg & h &= 75cm = 0,75m \\ R &= 5cm = 0,05m & t &= 5s \end{aligned}$$

$$h = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = 0,06m/s^2$$

- b) Qual a tensão na corda que suporta o bloco mais pesado?

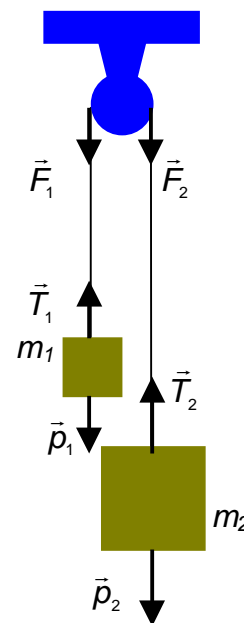
$$\vec{p}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow p_1 - T_1 = m_1 a$$

$$T_1 = p_1 - m_1 a = m_1 (g - a) = 4,87N$$

- c) Qual a tensão na corda que suporta o bloco mais leve?

$$\vec{p}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow T_2 - p_2 = m_2 a$$

$$T_2 = p_2 + m_2 a = m_2 (g + a) = 4,93N$$



d) Qual a aceleração angular da polia?

$$a = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{a}{r} = 1,2 \text{ rad/s}^2$$

e) Qual o seu momento de inércia?

$$\tau = I \alpha \Rightarrow F_1 r - F_2 r = I \alpha$$

$$I = \frac{(T_1 - T_2)r}{\alpha} = 0,0141 \text{ kg.m}^2$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

74 A figura a seguir mostra dois blocos de massa m suspensos nas extremidades de uma haste rígida, de peso desprezível, de comprimento $L = L_1 + L_2$, com $L_1 = 20 \text{ cm}$ e $L_2 = 80 \text{ cm}$. A haste é mantida na posição horizontal e então solta. Calcule a aceleração dos dois blocos quando eles começam a se mover.

$$L_1 = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$L_2 = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$$

$$\tau = I \alpha$$

$$m g L_2 - m g L_1 = I \alpha$$

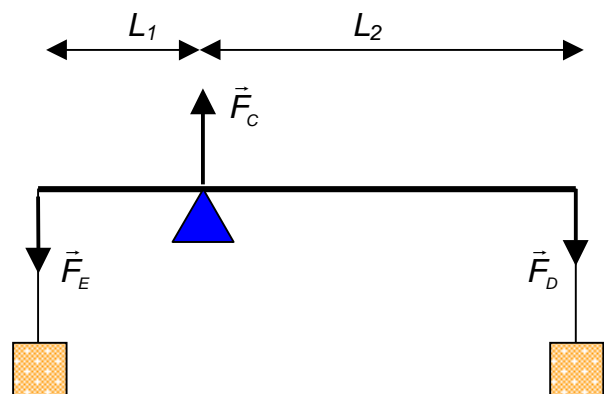
Mas

$$I = mL_1^2 + mL_2^2$$

Logo

$$mg(L_2 - L_1) = m(L_1^2 + L_2^2)\alpha \Rightarrow \alpha = \left(\frac{L_2 - L_1}{L_2^2 + L_1^2} \right) g = 8,64 \text{ rad/s}^2$$

$$\begin{cases} a_1 = -\alpha L_1 = -1,72 \text{ m/s}^2 \\ a_2 = +\alpha L_2 = +6,91 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$



Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

75 Dois blocos idênticos, de massa M cada uma, estão ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de raio R e de momento de inércia I . A corda não desliza sobre a polia; desconhece-se existir ou não atrito entre o bloco e a mesa; não há atrito no eixo da polia. Quando esse sistema é liberado, a polia gira de um ângulo θ num tempo t , e a aceleração dos blocos é constante

a) Qual a aceleração angular da polia?

$$\theta = w_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\theta}{t^2}$$

b) Qual a aceleração dos dois blocos?

$$a = \alpha R = \frac{2\theta R}{t^2}$$

c) Quais as tensões na parte superior e inferior da corda? Todas essas respostas devem ser expressas em função de M, l, R, θ, g e t .

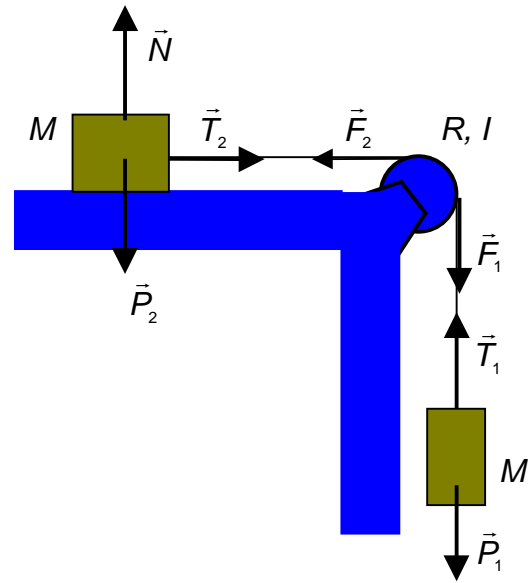
$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1 \Rightarrow P_1 - F_1 = ma$$

$$F_1 = P_1 - ma \Rightarrow F_1 = m(g - a)$$

$$F_1 = m\left(g - \frac{2\theta R}{t^2}\right)$$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow F_1 R - F_2 R = I\alpha \quad \therefore F_2 = F_1 - I\frac{\alpha}{R}$$

$$F_2 = mg - \frac{2\theta}{t^2} \left(mR + \frac{I}{R}\right)$$



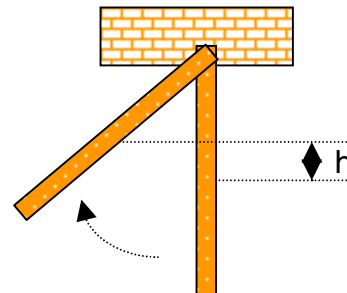
Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

81 Um bastão fino de comprimento L e massa m está suspenso livremente por uma de suas extremidades. Ele é puxado lateralmente para oscilar como um pêndulo, passando pela posição mais baixa com uma velocidade angular w .

a) Calcule a sua energia cinética ao passar por esse ponto.

O momento de inércia de uma haste em relação a um eixo perpendicular que passe por sua extremidade é:

$$I = \frac{mL^2}{3}$$



A energia cinética tem a forma:

$$K = \frac{1}{2} I w^2 = \frac{m w^2 L^2}{6}$$

- b) A partir desse ponto, qual a altura alcançada pelo seu centro de massa? Despreze o atrito e a resistência do ar.

Usando a conservação da energia mecânica, encontramos que:

$$K_i = U_f \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh \quad \therefore \quad h = \frac{I \omega^2}{2mg} = \frac{\omega^2 L^2}{6g}$$