Versão preliminar
19 de setembro de 2002

Notas de Aula de Física

13. Equilíbrio

Condições para o equilíbrio

Diz-se que um corpo está em equilíbrio quando o seu momento linear e o seu momento angular são constantes, ou seja:

$$\begin{cases} \vec{P} = constante \\ \vec{L} = constante \end{cases}$$

Quando as constantes mencionadas acima são nulas, diz-se que o corpo está em ***equilíbrio estático***. Nessa situação ele não está em movimento de translação e também não está em movimento de rotação.

As condições expostas nas equações anteriores implicam que:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{EXT} = 0 \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{EXT} = 0 \end{cases}$$

ou seja, para que um corpo esteja em equilíbrio estático devemos ter as seguintes condições satisfeitas:

$$\begin{cases} \vec{F}^{EXT} = 0 \\ \vec{\tau}^{EXT} = 0 \end{cases}$$

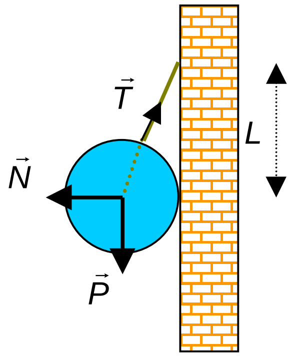
Solução de alguns problemas

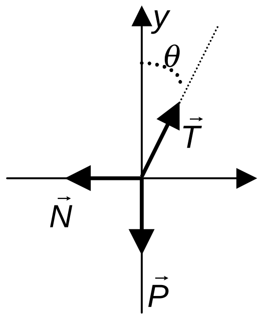
Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

10 Uma esfera uniforme de peso P e raio r é mantida no lugar por uma corda presa a uma parede, sem atrito, situada a uma distância L acima do centro da esfera, conforme a figura a seguir.

a) Encontre a tensão na corda.

Como a esfera está em repouso, temos que:





$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = 0$$

ou seja:

$$\begin{cases} T\cos\theta - P = 0 \\ T\,\mathrm{sen}\theta - N = 0 \end{cases}$$

Logo

$$T\cos\theta = P \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{\cos\theta} \quad \therefore \quad T = \left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2}}{L}\right)P$$

onde

$$\cos\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$

b) Encontre a força exercida pela parede sobre a esfera.

$$\frac{N}{P} = \frac{T\,\mathrm{sen}\theta}{T\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad N = P\tan\theta \quad \therefore \quad N = \left(\frac{r}{L}\right)P$$

onde

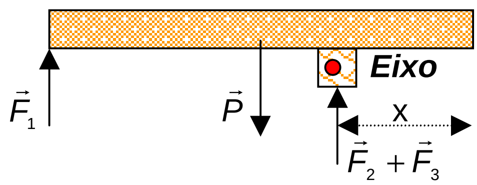
$$\tan\theta = \frac{r}{L}$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

15 Uma viga é transportada por três homens, estando um homem em uma das extremidades e os outros dois sustentando a viga por meio de uma trave transversal, colocada de modo que a carga esteja igualmente dividida entre os três homens. Em que posição está colocada a trave transversal? (Despreze a massa dessa trave.)

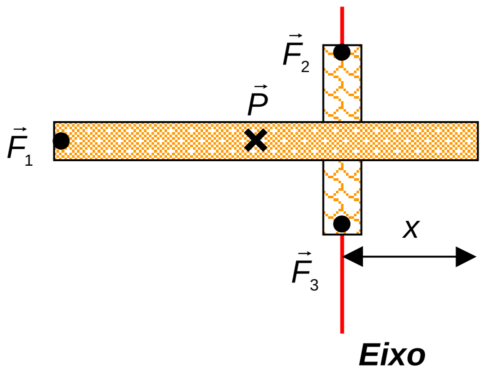
Por exigência do enunciado, temos que:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F$$



Como o corpo está em repouso a resultante de forças é nula, logo:

$$F_1 + F_2 + F_3 - P = 0$$



O torque resultante também é nulo. Vamos considerar o torque em relação a uma eixo que passa ao longo da trave transversal. Desse modo:

$$F_1(L-x) - P\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

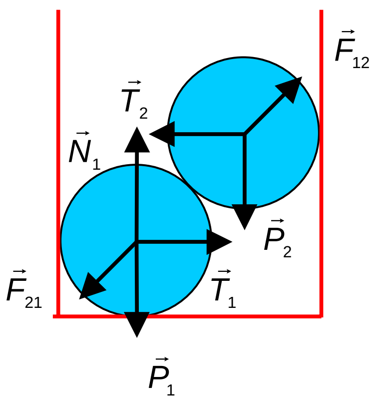
Da primeira equação encontramos que $P = 3\,F$, e usando esse resultado na segunda equação:

$$F(L-x) - 3F\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(L - \frac{3L}{2}\right) + (3x - x) = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{L}{4}$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
19	Duas esferas idênticas, uniformes e sem atrito, cada uma de peso P , estão em repouso conforme mostra a figura à seguir.

a) Encontre, em termos de P , as forças que atuam sobre as esferas devido às superfícies do recipiente.

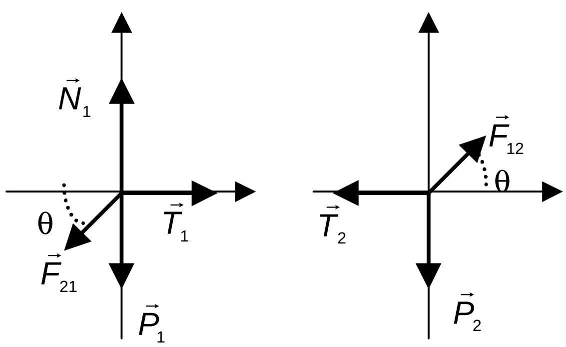
$\theta = 45^0$
$F_{12} = F_{21} = F$
$P_1 = P_2 = P$



Os dois corpos estão em repouso, logo a resultante das forças que atuam em cada um deles é nula.

$$\begin{cases} N_1 - P - F\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ e \\ T_1 - F\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\,\mathrm{sen}\,\theta - P = 0 \\ \\ F\cos\theta - T_2 = 0 \end{cases}$$



Das equações acima encontramos que:

$$T_1 = T_2 = F\cos\theta$$

e

$$N_1 - P - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2P$$

$$F = \frac{P}{\text{sen}\theta} = P\sqrt{2}$$

$$T = F\cos\theta = P\cot an\theta \quad \Rightarrow \quad T = P$$

b) Encontre, em termos de P, as forças que atuam sobre as esferas devido uma à outra, se a linha que une os centros das esferas faz um ângulo de 45^0 com a horizontal.

$$F = \frac{P}{\text{sen}\theta} = P\sqrt{2}$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
25	Uma placa quadrada uniforme, pesando $50{,}0kg$ e tendo $2{,}0m$ de lado, está pendurada em uma haste de $3{,}0m$ de comprimento e massa desprezível. Um cabo está preso à extremidade da haste e a um ponto na parede situado $4{,}0m$ acima do ponto onde a haste é fixada na parede, conforme mostra a figura a seguir.

a) Qual é a tensão no cabo?

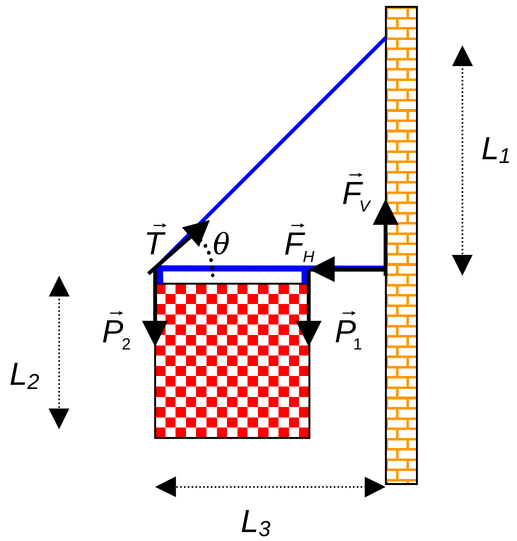
$M = 50kg$ $\qquad$ $L_2 = 2{,}0m$
$L_1 = 4{,}0m$ $\qquad$ $L_3 = 3{,}0m$

Vamos considerar apenas as forças que atuam na haste horizontal.

Como a placa é uniforme as forças P_1 e P_2 são tais que:

$$P_1 = P_2 = P/2 = Mg/2$$

Vamos considerar o torque das forças que atuam na haste, em relação a um eixo perpendicular ao papel e que passe no ponto onde a haste está presa na parede.



$$T\,\text{sen}\theta\, L_3 - P_2 L_3 - P_1 (L_3 - L_2) = 0$$

$$T\,\text{sen}\theta\, L_3 = \frac{P}{2}\left[L_3 + (L_3 - L_2)\right] \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{2L_3 - L_2}{2L_3\,\text{sen}\theta}\right)P$$

Mas

$$\text{sen}\theta = \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}} \quad \Rightarrow \quad T = \left[\frac{(2L_3 - L_2)\sqrt{L_1^2 + L_3^2}}{2L_1 L_3}\right]P = 408{,}34N$$

b) Qual é a componente vertical da força exercida pela parede sobre a haste?

Vamos considerar o torque das forças que atuam na haste, em relação a um eixo perpendicular ao papel e que passe no ponto onde o cabo suspende a haste.

$$P_1 L_2 - F_V L_3 = 0$$

$$F_V = \frac{P_1 L_2}{L_3} = \frac{P L_2}{2L_3} = 163{,}34N$$

c) Qual é a componente horizontal da força exercida pela parede sobre a haste?

Como a placa está em repouso, a resultante das forças que atuam nela é zero, Segundo um eixo horizontal, as forças que atuam são tais que:

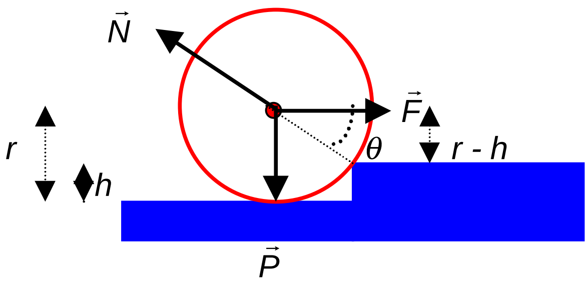
$$T\cos\theta - F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad F_H = T\cos\theta = T\left(\frac{L_3}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}}\right)$$

Usando o resultado para T deduzido anteriormente, temos que:

$$F_H = \left(\frac{2L_3 - L_2}{2L_1}\right)P = 245N$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
27	Na figura a seguir, qual a magnitude da força $\vec{F}$, aplicada horizontalmente no eixo da roda, necessária para fazer a roda ultrapassar um obstáculo de altura h ? Considere r como sendo o raio da roda e P o seu peso.

Na iminência da ultrapassagem do obstáculo, a roda perdeu o contato com o solo, e as forças que atuam nela estão mostradas na figura ao lado. Como ainda não existe movimento, a resultante é nula. Logo:



$$F - N\cos\theta = 0$$

$$P - N\,\text{sen}\theta = 0$$

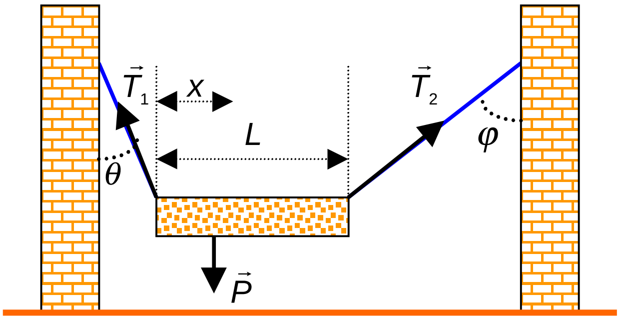
$$\frac{P}{F} = \frac{N\,\text{sen}\theta}{N\cos\theta} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P}{\tan\theta}$$

Mas

$$\tan\theta = \frac{r-h}{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}} = \frac{r-h}{\sqrt{2rh - h^2}} \quad \Rightarrow \quad F = \left[\frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r-h}\right]P$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
34	Uma barra não uniforme de peso P está suspensa em repouso, na horizontal, por duas cordas sem massa, como mostra a figura a seguir. Uma corda faz um ângulo $\theta = 36{,}9^0$ com a vertical e a outra faz um ângulo $\varphi = 53{,}1^0$, também com a vertical. Se o comprimento L da barra é $6{,}1m$, calcule a distância x entre a extremidade esquerda da barra e o seu centro de gravidade.

$\theta = 36{,}9^0$
$\varphi = 53{,}1^0$
$L = 6{,}1m$



Vamos calcular o torque das forças que atuam na barra em relação a um eixo perpendicular ao papel, e que passe por um ponto da extremidade esquerda da barra.

$$\tau = P\,x - T_2 \cos\varphi \, L = 0$$

ou seja:

$$x = \left(\frac{T_2 \cos\varphi}{P}\right)L$$

Por outro lado, como a barra está em repouso a resultante das forças que nela atuam é nula:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_1 \cos\theta + T_2 \cos\varphi - P = 0 \\ \\ T_1 \,\mathrm{sen}\,\theta - T_2 \,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \end{cases}$$

Da última equação temos que:

$$T_1 = T_2\left(\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{sen}\,\theta}\right)$$

e usando esse resultado na penúltima equação, encontramos:

$$\left[T_2\left(\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{sen}\,\theta}\right)\right]\cos\theta + T_2 \cos\varphi = P$$

ou seja:

$$T_2\{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta + \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\} = P\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$T_2\,\mathrm{sen}(\varphi + \theta) = P\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad T_2 = \left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}(\varphi+\theta)}\right]P$$

Mas

$$x = \left(\frac{T_2 \cos\varphi}{P}\right)L \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{L\cos\varphi}{P}\right)\left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}(\varphi+\theta)}\right]P$$

logo

$$x = \left[\frac{\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}(\varphi+\theta)}\right]L = 2{,}23m$$

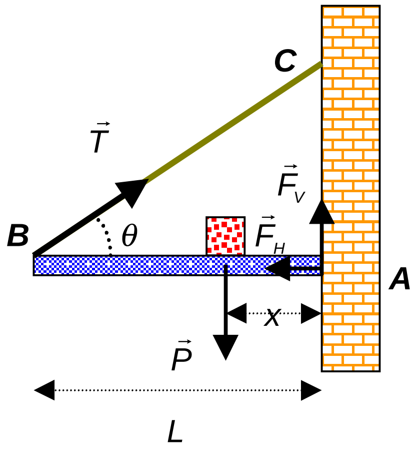
Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
35	Na figura a seguir, uma barra horizontal fina AB, de massa desprezível e comprimento L, é presa a uma dobradiça em uma parede vertical no ponto A e sustentada em B, por um fio fino BC, que faz um ângulo θ com a horizontal. Um peso P pode ser movido para qualquer posição ao longo da barra, sendo a sua posição definida pela distância x desde a parede até o seu centro de massa.

a) Encontre a tensão no fio.

Iremos considerar apenas as forças que atuam na barra.

Vamos calcular o torque em relação a um eixo perpendicular à folha de papel e que passe pelo ponto onde a barra está presa á parede pela dobradiça (ponto ***A***)

Como a barra está em repouso o torque em relação a qualquer eixo é nulo, logo:



$$T\,sen\theta\,L - P\,x = 0$$

$$T = \left(\frac{x}{L\,\text{sen}\theta}\right)P$$

b) Encontre a componente horizontal da força exercida sobre a barra pelo pino da dobradiça em ***A***.

Como a barra está em repouso a resultante das forças que nela atuam é nula. A componente horizontal da resultante é:

$$T\cos\theta - F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad F_H = T\cos\theta \quad \therefore \quad F_H = \left(\frac{x}{L\tan\theta}\right)P$$

c) Encontre a componente vertical da força exercida sobre a barra pelo pino da dobradiça em ***A***.

Vamos considerar, agora, o torque das forças em relação a um eixo perpendicular à folha de papel e que passe pelo ponto onde o fio está preso na barra (ponto ***B***).

$$P(L-x) - F_V L = 0 \quad \Rightarrow \quad F_V = \left(\frac{L-x}{x}\right)P \quad \therefore \quad F_V = \left(1 - \frac{x}{L}\right)P$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
39	Uma tábua uniforme de comprimento $L = 6{,}1m$ e peso $P = 444{,}8N$ está em repouso no chão, encostada numa quina sem atrito, situada no alto de uma parede de altura $h = 3{,}0m$ conforme a figura a seguir. A tábua permanece em equilíbrio para qualquer valor do ângulo $\theta \geq 70^0$, mas escorrega para $\theta < 70^0$. Encontre o coeficiente de atrito entre a tábua e o chão.

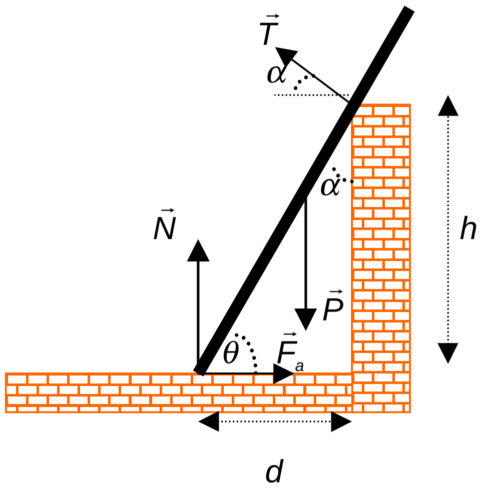
θ é o ângulo limite para o deslizamento, e isso significa que para esse ângulo a força de atrito estático é máxima, logo

$$F_a = \mu_E N$$

Pode-se perceber que os ângulos α e θ são complementares, logo:

$$\alpha = \pi/2 - \theta$$

A força da quina na tábua é perpendicular à tábua pois não existe atrito entre as duas.



Como o corpo está em equilíbrio, a resultante de forças é nula e o torque resultante também é nulo.
O torque em relação a um eixo que passe pelo ponto de apoio da escada no chão e que seja perpendicular à folha de papel tem a forma:

$$-(T\cos\alpha)\, h - (P\,\text{sen}\alpha)\, L/2 = 0$$

$$T = \frac{PL}{2h}\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

A resultante de forças tem a forma:

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{aE} = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} T\,\text{sen}\alpha - P + N = 0 \\ \\ -T\cos\alpha + F_{aE} = 0 \end{cases}$$

ou seja:

$$\frac{F_{aE}}{N} = \frac{T\cos\alpha}{P - T\,\text{sen}\alpha} = \frac{\mu_E N}{N} \quad \therefore \quad \mu_E = \frac{T\cos\alpha}{P - T\,\text{sen}\alpha}$$

e usando o resultado anterior para T , encontramos:

$$\mu_E = \frac{\left(\dfrac{PL}{2h}\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha}{P - \left(\dfrac{PL}{2h}\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\text{sen}\alpha} \quad \therefore \quad \mu_E = \frac{\dfrac{L}{2h}\text{sen}\alpha}{1 - \dfrac{L}{2h}\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}} = 0{,}3981$$