Versão preliminar
14 de novembro de 2003

Notas de Aula de Física

14. Gravitação

A gravidade é a mais fraca das forças fundamentais do Universo. É desprezível nas interações de partículas elementares e não tem qualquer papel nas propriedades das moléculas, dos átomos ou dos núcleos atômicos. A atração gravitacional entre corpos de dimensões comuns, por exemplo entre um automóvel e um edifício, é muito pequena para ser percebida.

Entre corpos muito grandes, como as estrelas, os planetas, os satélites, porém, a gravidade tem uma importância de primeiro plano. A força gravitacional da Terra sobre os corpos que nos rodeiam é a parte fundamental da nossa experiência.

É a gravidade que nos mantém sobre os solo e mantém a Terra e os outros planetas nas suas respectivas órbitas do sistema solar. A força gravitacional tem um papel importante na história das estrelas e no comportamento das galáxias. Numa escala muito grande, é a gravidade que controla a evolução do Universo.

Física
Paul A Tipler
Vol 1 - Cap 11 - pag300
LTC - Editora - 2000

O Universo e a Força Gravitacional

Desde tempos imemoriais o homem sempre esteve fascinado pelo movimento dos corpos celestes e das possíveis consequências destes movimentos na nossa vida aqui na Terra.

Por questões de fundo religioso, durante muito tempo supôs-se que o movimento desses corpos aconteciam de modo que a Terra tinha uma posição privilegiada neste concerto. Os religiosos acreditavam que o homem era o único ser vivo no Universo e o criador naturalmente o colocou num local especial, num planeta especial.

Era difícil aceitar o tamanho diminuto do homem frente às dimensões do Universo. Por esse motivo, todos aqueles que consideravam alguma idéia diferente deste geocentrismo era considerado herege. O ciência era considerada uma mera comprovação das crenças religiosas.

Com os dados observacionais do astrônomo Tycho Brahe, Johannes Kepler descobriu empiricamente que as trajetórias dos planetas em torno do Sol eram elipses.

Foi Isaac Newton quem mostrou os fundamentos de uma teoria da gravitação, que comprovava as predições de Kepler e as observações de Tycho Brahe. Mas ia ainda muito mais além ao analisar a interação entre duas massas quaisquer. Quando um corpo de massa m_1 está a uma distância r de um outro corpo de massa m_2 , a força de atração entre eles está dirigida ao longo da reta que une os corpos e tem a forma:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde

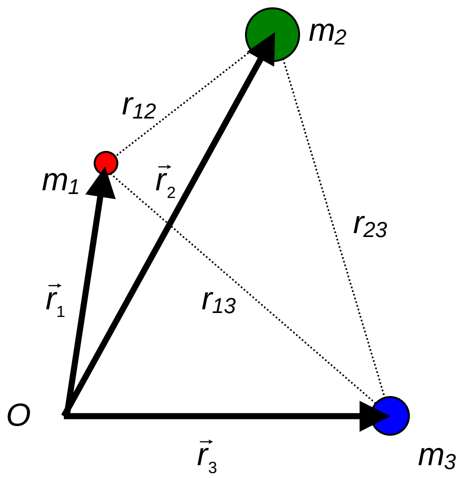
$$G = 6,67x10^{-11} m^3/kg.s^2$$

Gravitação e o Princípio da Superposição

A maioria dos modelos que representam fenômenos físicos são lineares. Por exemplo: a interação gravitacional entre três partículas pode ser considerada como a composição da interação aos pares dessas partículas. Isso acontece por causa do Princípio da Superposição.

Por causa deste princípio essa ciência se presta tão bem à aplicação do reducionismo. É dito que a Física é um campo de estudo reducionista porque costuma-se analisar os fenômenos extremamente sofisticados através da observação de cada uma das partes simples que compõe este fenômeno.

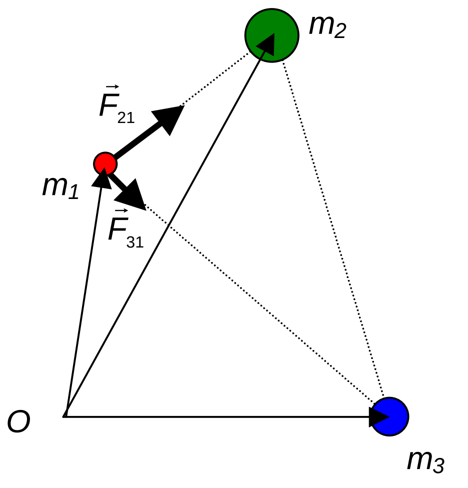
Para exemplificar, vamos considerar o sistema composto por três partículas, descrito anteriormente.



O vetor posição da partícula de massa m_1 é $\vec{r}_1$, o vetor posição da partícula de massa m_2 é $\vec{r}_2$ e o vetor posição da partícula de massa m_3 é $\vec{P}$. As distâncias entre as partículas são definidas como:

$$\begin{cases} \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & \therefore \quad r_{12} = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| \\ \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 & \therefore \quad r_{13} = \left|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right| \\ \vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 & \therefore \quad r_{23} = \left|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right| \end{cases}$$

As forças que as partículas de massa m_2 e m_3 fazem na partícula de massa m_1 têm valores que independem da presença mútua, ou seja: se apenas m_2 estiver presente a força que ela exercerá em m_1 terá o mesmo valor daquele quando m_3 também estiver presente. Essas forças têm a forma:



$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = G\dfrac{m_2 m_1}{r_{12}}\hat{r}_{12} \\ \\ \vec{F}_{31} = G\dfrac{m_3 m_1}{r_{13}}\hat{r}_{13} \end{cases} \quad onde \quad \begin{cases} \hat{r}_{12} = \dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} & \therefore \quad \left|\hat{r}_{12}\right| = 1 \\ \\ \hat{r}_{13} = \dfrac{\vec{r}_{13}}{r_{13}} & \therefore \quad \left|\hat{r}_{13}\right| = 1 \end{cases}$$

e a força que as duas partículas fazem em m_1 será:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

configurando assim o princípio da superposição.

Gravitação próximo à superfície da Terra

A força de atração gravitacional entre a Terra e um corpo de massa m próximo à sua superfície, em princípio deverá ter a mesma forma da atração entre dois corpos quaisquer. No entanto se esse corpo estiver a uma altura h acima da superfície da Terra, e pudermos considerar esta altura muito menor que o raio da Terra, poderemos fazer algumas considerações e até aproximações razoáveis sobre o valor desta força de atração.

Na superfície da Terra a força de atração entre os corpos tem a forma:

$$F(R_T) = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

e se definirmos a aceleração da gravidade g como:

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

encontraremos que:

$$F(R_T) = m\,g$$

Quando o corpo estiver a uma altura h da superfície da Terra, a força de interação terá a forma:

$$F(R_T + h) = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

onde o denominador poderá ser escrito como:

$$\frac{1}{(R_T + h)^2} = (R_T + h)^{-2} = R_T^{-2}\left(1 + {}^{h}\!/_{R_T}\right)^{-2}$$

Quando a altura do objeto de massa m for pequena em relação ao raio da Terra, ou seja: quando $h << R$, podemos aproximar o termo em parêntesis por uma expansão em séries de potências. Dito de outro modo, para x pequeno podemos fazer a expansão à seguir:

$$(1 + x)^N \approx 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

ou seja:

$$\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} \approx 1 - 2\left(\frac{h}{R_T}\right) + \cdots$$

Desse modo:

$$F(R_T + h) \approx G\frac{M_T m}{R_T^2}\left[1 - 2\left(\frac{h}{R_T}\right)\right]$$

ou ainda:

$$F(R_T + h) = m\,g\left[1 - 2\left(\frac{h}{R_T}\right)\right]$$

e quando a altura h for realmente muito menor que o raio R_T da Terra, podemos desprezar as correções e considerar a aproximação trivial, de modo que:

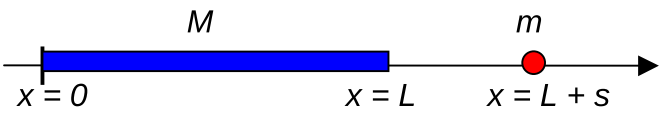
$$F(R_T + h) = m\,g$$

onde definimos o peso do objeto com uma força constante e independente da altura, com uma forma do tipo:

$$P = m\,g$$

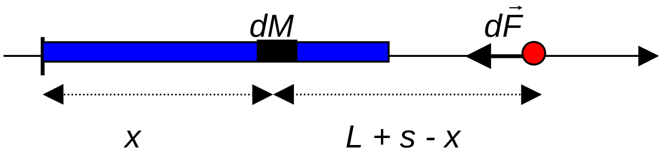
Força entre uma haste e uma massa pontual – Caso 1

Vamos considerar uma haste de largura desprezível e massa M distribuída uniformemente ao longo do seu comprimento L. Uma partícula de massa m está colocada a uma distância s da haste, como mostra a figura ao lado.



Devemos calcular a força que um elemento de massa dM da haste exerce sobre a partícula. essa força é dirigida para a haste e tem módulo:

$$dF = G\frac{m\,dM}{(L + s - x)^2}$$



A força total que a haste exercerá sobre a partícula será a soma de todas as contribuições das massas elementares que compõe a haste. Por outro lado existe uma relação entre o elemento de massa dM e o espaço dx que ele ocupa na haste. Como a haste tem a massa distribuída uniformemente, temos a proporção:

$$\begin{cases} dM \to dx \\ \\ M \to L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dM = \frac{M}{L}dx$$

Desse modo, a força total tem a forma:

$$F = \int_o^L G\frac{mM}{L}\frac{dx}{(L + s - x)^2}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = L + d - x$, encontramos:

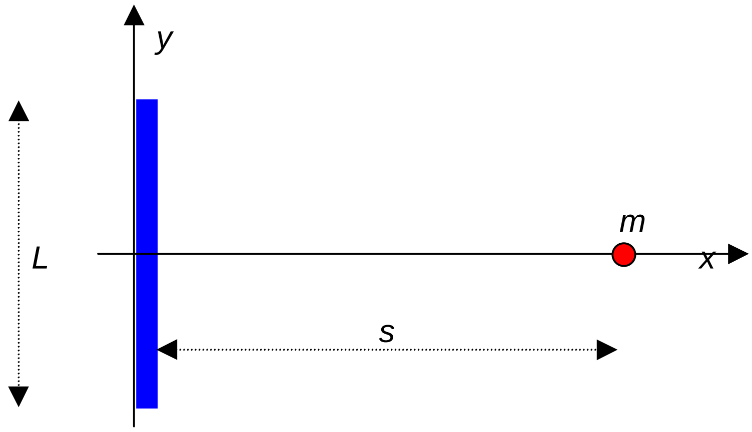
$$F = G\frac{mM}{L}\int_s^{L+s}\frac{du}{u^2} = G\frac{mM}{L}\left[-\frac{1}{u}\Big|_s^{L+s}\right] = G\frac{mM}{L}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{L+s}\right] = G\frac{mM}{L}\frac{L}{s(L+s)}$$

ou seja

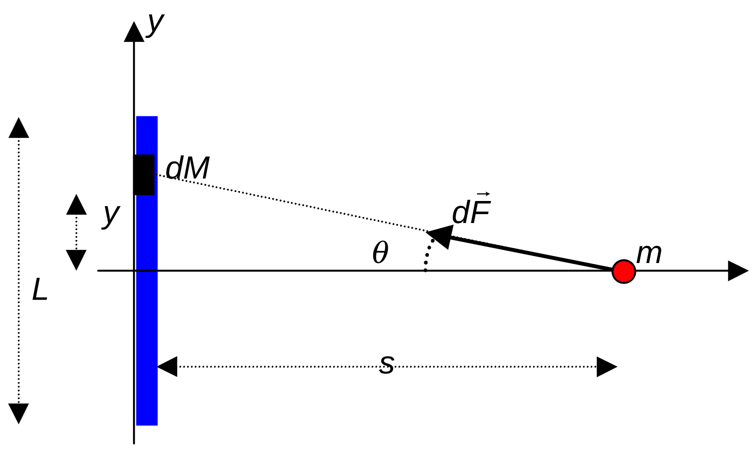
$$F = G\frac{mM}{s(L+s)}$$

Força entre uma haste e uma massa pontual – Caso 2

Vamos considerar uma haste de largura desprezível e massa M distribuída uniformemente ao longo do seu comprimento L. Uma partícula de massa m está colocada a uma distância s da haste, como mostra a figura ao lado.



Devemos calcular o elemento de força $d\vec{F}$ que um elemento de massa dM da haste exerce sobre a partícula de massa m. Vamos considerar a haste no eixo y e a partícula no eixo x. Essa força é dirigida ao longo da reta que une o elemento de massa dM e a partícula. A reta faz um ângulo θ com o eixo x.
Supondo que o elemento de massa dM está a uma distância y do ponto médio da haste, o módulo do elento de força tem a forma:



$$dF = G\frac{m\,dM}{r^2}$$

onde

$$r^2 = s^2 + y^2$$

As componentes cartesianas dF_X e dF_Y são escritas como:

$$\begin{cases} dF_X = dF\cos\theta \\ \\ dF_Y = dF sen\theta \end{cases} \quad onde \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{s}{r} = \dfrac{s}{\sqrt{s^2+y^2}} \\ \\ sen\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{s^2+y^2}} \end{cases}$$

Como a haste tem a massa distribuída uniformemente, temos a proporção:

$$\begin{cases} dM \to dy \\ \\ M \to L \end{cases} \Rightarrow \quad dM = \frac{M}{L}dy$$

Podemos então dizer que:

$$dF_X = G\frac{m}{r^2}\left(\frac{M}{L}dy\right)\frac{s}{r} = G\frac{mMs}{L}\frac{dy}{r^3}$$

ou seja:

$$F_X = G\frac{mMs}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dy}{\left(s^2+y^2\right)^{3/2}}$$

E de maneira equivalente:

$$dF_Y = G\frac{m}{r^2}\left(\frac{M}{L}dy\right)\frac{y}{r} = G\frac{mM}{L}\frac{ydy}{r^3}$$

ou seja:

$$F_Y = G\frac{mM}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{ydy}{\left(s^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Para calcular F_X vamos fazer a substituição:

$$\begin{cases}\dfrac{y}{s} = \tan\beta \\ \\ dy = s\sec^2\beta\end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y = +\dfrac{L}{2} \Rightarrow \tan\beta_S = +\dfrac{L}{2s} \\ \\ y = -\dfrac{L}{2} \Rightarrow \tan\beta_I = -\dfrac{L}{2s}\end{cases}$$

Logo:

$$F_X = G\frac{mMs}{L}\int_{\beta_I}^{\beta_S}\frac{s\sec^2\beta\ d\beta}{\left[s^2\left(1+\tan^2\beta\right)\right]^{3/2}} = G\frac{mMs}{L}\int_{\beta_I}^{\beta_S}\frac{s\sec^2\beta\ d\beta}{s^3\sec^3\beta} = G\frac{mM}{Ls}\int_{\beta_I}^{\beta_S}\cos\beta\ d\beta$$

$$F_X = G\frac{mM}{Ls}\left(sen\beta_S - sen\beta_I\right)$$

Mas

$$\tan\beta_S = \frac{sen\beta_S}{\cos\beta_S} = \frac{sen\beta_S}{\sqrt{1-sen^2\beta_S}} \quad \therefore \quad sen\beta_S = \frac{\tan\beta_S}{\sqrt{1+\tan^2\beta_S}}$$

ou seja:

$$sen\beta_S = \frac{\dfrac{L}{2s}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{L}{2s}\right)^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2+4s^2}}$$

e de modo equivalente:

$$sen\beta_I = -\frac{L}{\sqrt{L^2+4s^2}}$$

e portanto:

$$F_X = G\frac{mM}{Ls}\left[\left(+\frac{L}{\sqrt{L^2+4s^2}}\right)-\left(-\frac{L}{\sqrt{L^2+4s^2}}\right)\right] = G\frac{mM}{Ls}\left(\frac{2L}{\sqrt{L^2+4s^2}}\right)$$

ou seja:

$$F_X = G\frac{mM}{s}\frac{2}{\sqrt{L^2+4s^2}}$$

Para o cálculo da componente y podemos observar que a simetria nos conduz a um resultado nulo. Para cada contribuição para a componente F_Y oriunda de um elemento de massa acima do ponto médio temos uma contribuição equivalente de um elemento de massa simétrico abaixo do ponto médio. Podemos mostrar esse resultado calculando explicitamente a integral:

$$F_Y = G\frac{mM}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{ydy}{\left(s^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Usando a substituição:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{s} = \tan\beta \\ \\ dy = s\sec^2\beta \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y = +\dfrac{L}{2} \Rightarrow \tan\beta_S = +\dfrac{L}{2s} \quad \therefore \quad \cos\beta_S = \dfrac{2s}{\sqrt{L^2+s^2}} \\ \\ y = -\dfrac{L}{2} \Rightarrow \tan\beta_I = -\dfrac{L}{2s} \quad \therefore \quad \cos\beta_I = \dfrac{2s}{\sqrt{L^2+s^2}} \end{cases}$$

ou seja:

$$F_Y = G\frac{mM}{L}\int_{\beta_I}^{\beta_S}\frac{(s\tan\beta)(s\sec^2\beta\, d\beta)}{\left[s^2\left(1+\tan^2\beta\right)\right]^{3/2}} = G\frac{mM}{L}\frac{1}{s}\int_{\beta_I}^{\beta_S}\frac{\tan\beta\, d\beta}{\sec\beta} = G\frac{mM}{Ls}\int_{\beta_I}^{\beta_S} sen\beta\, d\beta$$

$$F_Y = -G\frac{mM}{Ls}\left(\cos\beta_S - \cos\beta_I\right) = 0$$

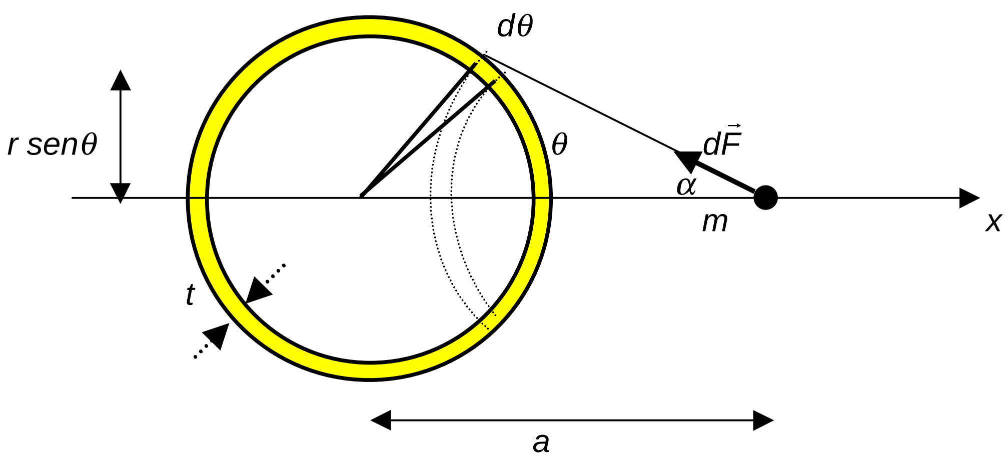
Campo produzido por uma distribuição esférica de massa em seu exterior

Seja uma casca esférica de raio r, espessura infinitesimal t e massa M. Qual a força de interação gravitacional entre essa casca e uma partícula de massa m, localizada externamente a uma distância a de seu centro?

Para calcular essa força, vamos considerar inicialmente a interação gravitacional entre a partícula de massa m e um anel que faz parte da casca esférica.

A reta que liga um ponto desse anel e a origem das coordenadas faz um ângulo θ com o eixo x, e o ângulo enfeixado por ele é $d\theta$. Desse modo esse anel terá raio $r.sen\theta$ e largura $r.d\theta$, e $d\vec{F}$ será essa força a ser calculada.

A reta que une a massa m até um ponto do anel tem um comprimento R e faz um ângulo α com o eixo x.



A força elementar $d\vec{F}$ tem componentes x e s, onde a componente s está no plano perpendicular ao eixo x. Ou seja:

$$d\vec{F} = \hat{i}\,dF_x + \hat{s}dF_s$$

e portanto:

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{s}\vec{F}_S \quad \therefore \quad \begin{cases} F_x = \int dF_x = \int \cos\alpha\, dF \\ \\ F_s = \int dF_s = \int \operatorname{sen}\alpha\, dF \end{cases}$$

Por simetria $F_S = 0$ pois cada uma das contribuições infinitesimais tem um equivalente de sinal contrário, que na integração tornará nula essa componente.

O módulo da força elementar dF, tem a forma:

$$dF = G\frac{m\,dM}{R^2}$$

onde dM é a massa elementar do anel e R é a distância de um ponto desse anel até a posição da partícula de massa m. Iremos usar o conceito de densidade volumétrica de massa, que é reprentada pela letra grega ρ, e é definida como a razão entre a massa e o volume ocupado por essa massa, ou seja:

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

e quando a distribuição de massa for uniforme, podemos também dizer que:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

O volume elementar do anel será:

$$dV = 2\pi \text{ (raio) (largura) (espessura)}$$

$$dV = 2\pi\, (r \operatorname{sen}\theta)\, (r\, d\theta)\, (\, t\,)$$

e portanto:

$$dM = \rho\, dV = 2\pi\, \rho\, t\, (r \operatorname{sen}\theta)\, (r\, d\theta) = 2\pi\, \rho\, t\, r^2 \operatorname{sen}\theta\ \, d\theta$$

O ângulo α definido como aquele que a reta que une a partícula ao anel genérico, faz com o eixo x, e é tal que:

$$\cos\alpha = \frac{a - r\cos\theta}{R}$$

onde R é a distância entre a partícula de massa m até o anel genérico. Desse modo

$$dF_x = dF\cos\alpha = G\frac{m\left[2\pi\, t\, \rho\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\right]}{R^2}\frac{a - r\cos\theta}{R}$$

ou ainda:

$$dF_x = \left[2\pi\, t\, \rho G m r^2\right]\frac{(a - r\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta\, d\theta)}{R^3}$$

onde

$$R^2 = (a - r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$$

ou seja:

$$dF_x = \left[2\pi\, t\, \rho\, G\, m\, r^2\right]\frac{(a - r\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta\, d\theta)}{\left[a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta\right]^{3/2}}$$

e então:

$$F_x = \left[2\pi\, t\, \rho\, G\, m\, r^2\right]\int_0^{\pi}\frac{(a - r\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta\, d\theta)}{\left[a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta\right]^{3/2}}$$

Em termos da física envolvida o problema está encerrado, mas essa integral não tem uma aparência muito simpática. Talvez fosse mais adequado fazer uma mudança de variável e usar a distância R ao invés do ângulo θ. À partir da definição de R podemos diferenciar e encontrar que:

$$2RdR = 2ar\operatorname{sen}\theta\, d\theta \quad \therefore \quad \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{RdR}{ar}$$

e também que:

$$r\cos\theta = \frac{R^2 - a^2 - r^2}{-2a} = \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2a}$$

e podemos colocar como:

$$dF_x = \frac{\left[2\pi\, t\, \rho G m r^2\right]}{R^2}\left(\frac{RdR}{ar}\right)\frac{a - \dfrac{r^2 + a^2 - R^2}{2a}}{R} = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{R}\left(\frac{dR}{a}\right)\frac{2a^2 - \left(r^2 + a^2 - R^2\right)}{2aR}$$

$$dF_x = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left(\frac{R^2 + a^2 - r^2}{R^2}\right)dR = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left[1 + \frac{a^2 - r^2}{R^2}\right]dR$$

$$F_x = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\int_{a-r}^{a+r}\left[1 + \frac{a^2 - r^2}{R^2}\right]dR$$

$$F_x = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left\{R\Big|_{a-r}^{a+r} + \left(a^2 - r^2\right)\left[-\frac{1}{R}\Big|_{a-r}^{a+r}\right]\right\}$$

$$F_x = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left\{\left[(a + r) - (a - r)\right] - \left(a^2 - r^2\right)\left[\frac{1}{a + r} - \frac{1}{a - r}\right]\right\}$$

$$F_x = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left\{(2r) + (2r)\right\} = \frac{4\pi r^2\, t\, \rho G m}{a^2}$$

Mas o volume V da esfera é o produto de sua área $4\pi r^2$ por sua espessura t, ou seja:

$$F_x = G\frac{m(\rho V)}{a^2}$$

e como foi definido anteriormente, $M = \rho V$, logo:

$$F_x = G\frac{mM}{a^2}$$

A força de atração entre uma casca esférica de massa M , cujo centro está a uma distância a de uma partícula de massa m tem o mesmo valor da atração entre duas partículas que distam de $a > r$ e têm massas M e m respectivamente. Em outras palavras: a casca esférica se comporta com se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro.

Campo produzido por uma distribuição esférica de massa em seu interior

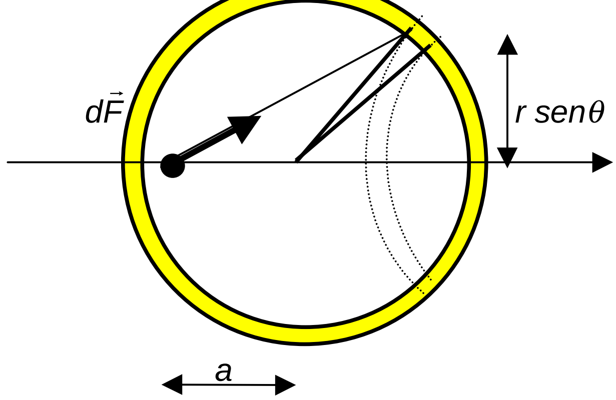
Seja uma casca esférica de raio r , espessura infinitesimal t e massa M . Qual a força de interação gravitacional entre essa casca e uma partícula de massa m , localizada internamente a uma distância a de seu centro?

Para calcular essa força, vamos considerar inicialmente a interação gravitacional entre a partícula de massa m e um anel que faz parte da casca esférica.

A reta que liga um ponto desse anel e a origem das coordenadas faz um ângulo θ com o eixo x , e o ângulo enfeixado por ele é $d\theta$. Desse modo esse anel terá raio $r.sen\theta$ e largura $r.d\theta$ *,* e $d\vec{F}$ será essa força a ser calculada.

A reta que une a massa m até um ponto do anel tem um comprimento R e faz um ângulo α com o eixo x .

A força elementar $d\vec{F}$ tem componentes x e s , onde a componente s está no plano perpendicular ao eixo x . Ou seja:



$$d\vec{F} = \hat{i}dF_x + \hat{s}dF_s$$

e portanto:

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{s}F_s$$

$$\begin{cases} F_x = \int dF_x = \int \cos\alpha \, dF \\ \\ F_s = \int dF_s = \int \operatorname{sen}\alpha \, dF \end{cases}$$

Por simetria $F_S = 0$ pois cada uma das contribuições infinitesimais tem um equivalente de sinal contrário, que na integração tornará nula essa componente.

O módulo da força elementar dF , tem a forma:

$$dF = G\frac{m\,dM}{R^2}$$

onde dM é a massa elementar do anel e R é a distância de um ponto desse anel até a posição da partícula de massa m. Iremos usar o conceito de densidade volumétrica, que é reprentada pela letra graga ρ, e é definida como a razão entre a massa e o volume ocupado por essa massa, ou seja:

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

e quando a distribuição de massa for uniforme, podemos também dizer que:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

O volume elementar do anel será:

$$dV = 2\pi\,(raio)\,(largura)\,(espessura)$$

$$dV = 2\pi\,(r\,sen\theta)\,(r\,d\theta)\,t$$

e portanto:

$$dM = \rho\,dV = 2\pi\,\rho\,t\,(r\,sen\theta)\,(r\,d\theta) = 2\pi\,\rho\,t\,r^2\,sen\theta\;d\theta$$

O ângulo α definido como aquele que a reta que a massa da partícula ao anel faz com o eixo x é de tal modo que:

$$\cos\alpha = \frac{a + r\cos\theta}{R}$$

ou ainda:

$$dF_x = \left[2\pi\,t\,\rho G m r^2\right]\frac{(a + r\cos\theta)(\text{sen}\theta\,d\theta)}{R^3}$$

onde

$$R^2 = (a + r\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\theta)^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta$$

ou seja:

$$dF_x = \left[2\pi\,t\,\rho G\,m\,r^2\right]\frac{(a + r\cos\theta)(\text{sen}\theta\,d\theta)}{\left[a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta\right]^{3/2}}$$

e então:

$$F_x = \left[2\pi\,t\,\rho G\,m\,r^2\right]\int_0^{\pi}\frac{(a + r\cos\theta)(\text{sen}\theta\,d\theta)}{\left[a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta\right]^{3/2}}$$

Em termos da física envolvida o problema está encerrado, mas essa integral não tem uma aparência muito simpática. Talvez fosse mais adequado fazer uma mudança de variável e usar a distância R ao invés do ângulo θ. À partir da definição de R podemos diferenciar e encontrar que:

$$2RdR = -2ar sen\theta\,d\theta \quad \therefore \quad sen\theta\,d\theta = -\frac{RdR}{ar}$$

e também que:

$$r\cos\theta = \frac{R^2 - a^2 - r^2}{2a} = \frac{R^2 - a^2 - r^2}{2a}$$

e podemos colocar como:

$$dF_x = \frac{\left[2\pi\, t\, \rho G m r^2\right]}{R^2}\left(-\frac{RdR}{ar}\right)\frac{a + \dfrac{R^2 - a^2 - r^2}{2a}}{R} = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{R}\left(-\frac{dR}{a}\right)\frac{2a^2 + \left(R^2 - a^2 - r^2\right)}{2aR}$$

$$dF_x = -\frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left(\frac{R^2 + a^2 - r^2}{R^2}\right)dR = -\frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left[1 + \frac{a^2 - r^2}{R^2}\right]dR$$

$$F_x = -\frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\int_{r+a}^{r-a}\left[1 + \frac{a^2 - r^2}{R^2}\right]dR$$

$$F_x = -\frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left\{R\Big|_{r+a}^{r-a} + \left(a^2 - r^2\right)\left[-\frac{1}{R}\Big|_{r+a}^{r-a}\right]\right\}$$

$$F_x = -\frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left\{\left[(r-a) - (r+a)\right] - \left(a^2 - r^2\right)\left[\frac{1}{r-a} - \frac{1}{r+a}\right]\right\}$$

$$F_x = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left\{\left[-2a\right] - \left(a^2 - r^2\right)\frac{2a}{\left(r^2 - a^2\right)}\right\}$$

$$F_x = \frac{\pi\, t\, \rho G m r}{a^2}\left\{-2a + 2a\right\} = 0$$

Encontramos então, que é nula a força de atração entre uma casca esférica de massa M e uma partícula de massa m colocada no seu interior.

Cálculo alternativo - partícula no interior

Uma maneira alternativa de calcular a interação entre uma casca esférica de massa M, raio r e espessura h, e uma partícula de massa m pode ser depreendida da figura à seguir.

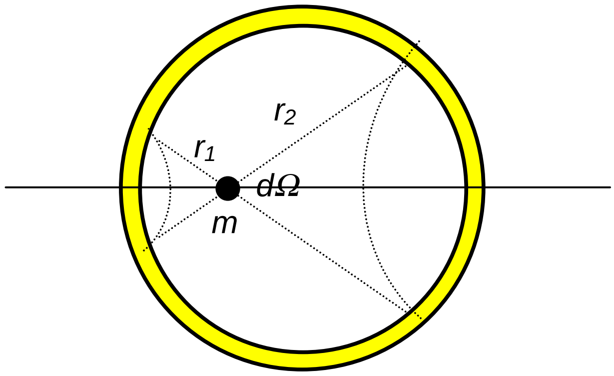
Construímos dois cones complementares, cujos vértices coincidem com a posição da partícula de massa m. Cada cone delimita um mesmo ângulo sólido $d\Omega$ e a interseção de cada cone com a casca esférica define uma área elementar dA nesta casca.

Usando a definição de ângulo sólido, temos que:

$$dA_1 = r_1^2\, d\Omega$$

e também

$$dA_2 = r_2^2\, d\Omega$$



onde deve ficar claro que as áreas que delimitadas por ambos os cones dependem da sua distância (r_1 ou r_2) à partícula.

Como a casca esférica tem espessura h os volumes elementares delimitados por cada cone na esfera, têm a forma:

$$\begin{cases} dV_1 = h\, dA_1 = hr_1^2 d\Omega \\ \\ dV_2 = h\, dA_2 = hr_2^2 d\Omega \end{cases}$$

A massa elementar de cada um desses volumes é:

$$\begin{cases} dM_1 = \rho dV_1 = \rho h r_1^2 d\Omega \\ \\ dM_2 = \rho dV_2 = \rho h r_2^2 d\Omega \end{cases}$$

A força que cada uma dessas massas elementares exercerá na partícula, tem a forma:

$$\begin{cases} dF_1 = G\dfrac{m\, dM_1}{r_1^2} = G\dfrac{m\left(\rho h r_1^2 d\Omega\right)}{r_1^2} = G\, m\, \rho\, h\, d\Omega \\ \\ dF_2 = G\dfrac{m\, dM_2}{r_2^2} = G\dfrac{m\left(\rho h r_2^2 d\Omega\right)}{r_2^2} = G\, m\, \rho\, h\, d\Omega \end{cases} \Rightarrow \quad dF_1 = dF_2 = dF$$

Toda a superfície será varrida por cones complementares, de modo que a contribuição de uma região de uma região para a força gravitacional total, anulará a contribuição da região complementar e desse modo a força de interação total é nula.

Podemos chegar a essa conclusão considerando a soma de dF por todos os ângulos sólidos da esfera, ou seja:

$$F = \int_\Omega dF = \int_\Omega G\, m\, \rho\, h\, d\Omega$$

mas

$$d\Omega = sen\theta\, d\theta\, d\varphi$$

logo:

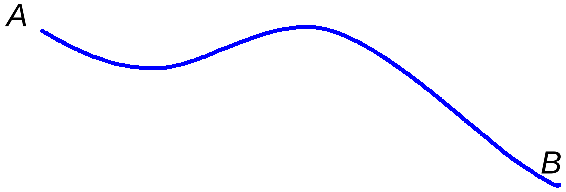
$$F = G\, m\, \rho\, h \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 0$$

Energia potencial gravitacional

Para toda força conservativa $\vec{F}(\vec{r})$ podemos associar uma energia potencial $V(\vec{r})$. Essa energia potencial é definida em termos do trabalho executado pela força correspondente, da seguinte forma:

$$\Delta U = U_B - U_A = - W_{AB}$$

ou seja: a variação de energia potencial de uma partícula entre dois pontos A e B é igual ao trabalho executado (com sinal negativo) pela força considerada para levar essa partícula do ponto A até o ponto B.



Outro modo de colocar essa questão é dizer que:

$$U_B = U_A - W_{AB}$$

ou seja:

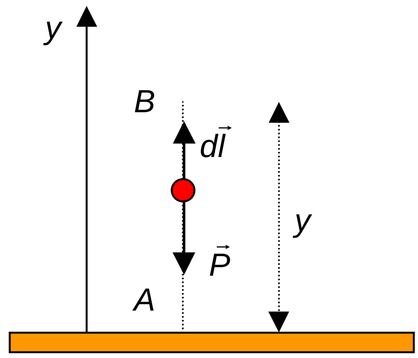
$$U_B = U_A - \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

A energia potencial é definida em termos de uma variação ΔU, ou seja: ela é definida a menos de uma constante arbitrária. Em outra palavras: definimos variações de energia potencial; o quanto diminuiu (ou aumentou) a energia de um corpo que foi de uma posição inicial até uma final. Escolhemos a origem da energia potencial de maneira arbitrária, como já foi mencionado.

Vamos detalhar o cálculo da energia potencial em duas situações típicas: muito próximo da superfície da Terra e muito longe da superfície.

Energia potencial gravitacional próximo à superfície da Terra

Próximo à superfície da Terra podemos considerar a força de interação entre a Terra e uma partícula de massa m constante e com módulo mg.



Vamos calcular a variação de energia potencial gravitacional entre o ponto inicial A localizado na superfície da Terra e o ponto final B localizado numa altura y.

O vetor $d\vec{l}$ é definido como um vetor infinitesimal dirigido ao longo da curva de integração e apontando da posição inicial para a posição final.

Desse modo:

$$U_B = U_A - W_{AB} = U_A - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

onde escolhemos U_A como a origem da energia potencial e portanto com o valor zero. Usando essas considerações, podemos dizer que:

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{g} = -\hat{j}\, mg \\ \\ d\vec{l} = +\hat{j}\; dy \end{cases}$$

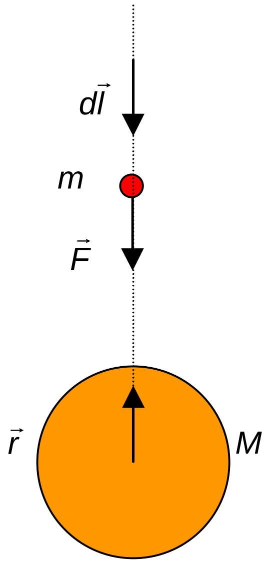
e

$$U(y) = -\int_0^Y \left(-\hat{j}\, mg\right) \cdot \left(\hat{j}\, dy\right) = mg\int_0^Y dy = mg(y-0)$$

$$U(y) = m\, g\, y$$

Energia potencial gravitacional distante da superfície da Terra

No caso mais geral, quando quisermos calcular a diferença de energia potencial gravitacional entre dois pontos distantes devemos usar a equação de gravitação sem aproximações.



Vamos calcular a diferença de energia potencial entre duas posições ocupadas por uma partícula. Inicialmente ela está numa posição muito distante (no infinito) e ela então é trazida até uma posição finita r . Ou seja:

$$U(r) - U(\infty) = -\int_\infty^r \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Vamos considerar a origem da energia potencial num ponto muito distante, de modo que:

$$U(\infty) = 0$$

Devemos considerar que:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \quad e \quad \begin{cases} \vec{F} = -\hat{r}F \\ \\ d\vec{l} = -\hat{r}\, dl = +\hat{r}\, dr \end{cases}$$

e então:

$$U(r) = \int_\infty^r \left(-\hat{r}\, G\frac{Mm}{r^2}\right) \cdot \hat{r}\, dr = GMm\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = +GMm\left[-\frac{1}{r}\Bigg|_\infty^r\right] = -GMm\left[\frac{1}{r} - 0\right]$$

e finalmente:

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

Por outro lado:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(r) = -\hat{r}\frac{dU}{dr} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = \hat{r}\,G\frac{Mm}{r^2}$$

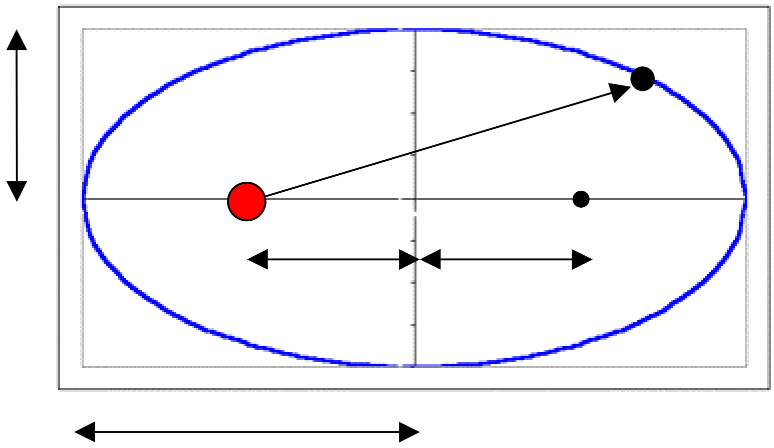
Leis de Kepler

A humanidade sempre foi fascinada pelo céu noturno, com a infinidade de estrelas e com os brilhantes planetas. No final do século XVI, o astrônomo Tycho Brahe estudou os movimentos dos planetas e conseguiu fazer observações muito mais exatas que as feitas anteriormente por outros observadores.

Com os dados de Tycho Brahe, Johannes Kepler descobriu que as trajetórias dos planetas em torno do Sol eram elipses. Mostrou também que tinham velocidades maiores quando orbitavam nas proximidades do Sol e menores quando estavam muito afastados. Kepler estabeleceu, por fim, uma relação matemática precisa entre o período de um planeta e a sua distância média ao Sol, e enunciou os resultados da sua investigação em três leis empíricas do movimento dos planetas.
Física
Paul A Tipler
Vol 1 - Cap 11 - pag300
LTC - Editora - 2000

As Leis empíricas de Kepler vieram a ser comprovadas posteriormente pela Mecânica Newtoniana.

Primeira - Lei das Órbitas: Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.



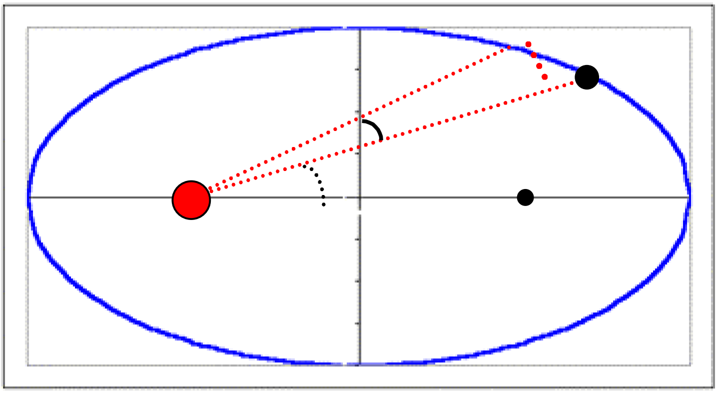
A Mecânica Newtoniana deduziu uma conclusão ainda mais geral. Quando um corpo está sob a ação de uma força que varia com o inverso do quadrado da distância (como a força gravitacional) ele descreve uma órbita que é uma cônica (elipse, parábola ou hipérbole). A órbita a ser descrita pelo corpo depende da sua Energia Mecânica. No caso dos planetas temos órbitas fechadas - elipse e no caso dos cometas temos uma trajetória aberta - hipérbole.

Para maiores detalhes da análise das Leis de Kepler o interessado deve consultar :

Classical Machanics
Herbert Goldstein
Cap 3 - Sec 3-7
Addison Wesley - 1980

Segunda - Lei das Áreas: Uma linha que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

Vamos considerar a área ΔA varrida pelo planeta num intervalo de tempo Δt . Quando o intervalo de tempo for muito pequeno, a área do triângulo pontilhado em vermelho vale aproximadamente:



$$\Delta A \approx r \,.\, (r \,.\, \Delta\theta)/2$$

onde r mede aproximadamente a distância entre o Sol e o planeta e $\Delta\theta$ mede o ângulo varrido pela linha quando o planeta se movimenta da posição inicial até a final. A taxa com que essa área varia com o tempo é dada por:

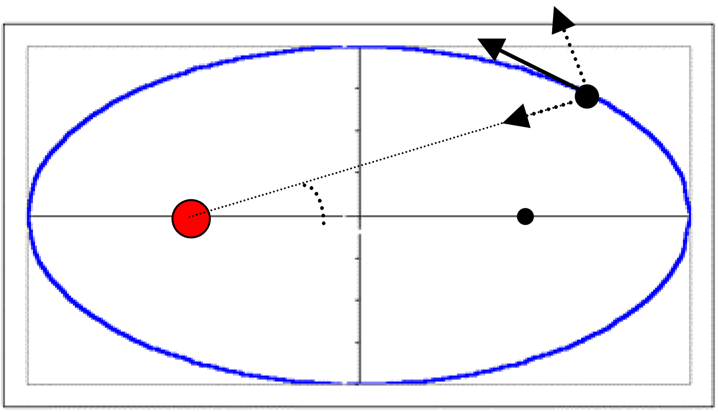
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

e quando o intervalo de tempo tender a zero:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 w$$

onde w é a velocidade angular do planeta.

Por outro lado, o vetor momento linear $\vec{p}$ do planeta tem a direção tangente à curva descritas por esse objeto. Iremos decompor esse vetor segundo uma componente radial e outra componente perpendicular. A componente radial tem a direção ao longo da linha que une o planeta ao Sol e componente perpendicular é perpendicular a essa linha. Desse modo, o vetor momento angular $\vec{L}$ do planeta num dado instante é dado por:



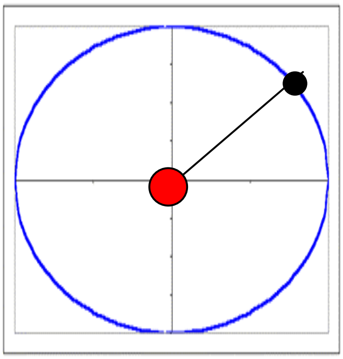
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad L = r\, p_{\perp} = r\,(m v_{\perp}) = r(m w r) = m r^2 w$$

Considerando a variação da área varrida pela linha, encontramos que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Se dA/dt é constante como Kepler afirmou, isso significa que L também deve ser constante - o momento angular deve ser conservado. Assim, a segunda Lei de Kepler é equivalente á lei de conservação do momento angular

Terceira - Lei dos Períodos: O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.



Por simplicidade, vamos considerar que a órbita do planeta de massa m é circular de raio R, e o movimento tem um período T. A única força que atua no planeta é a força gravitacional e portanto ela é a força centrípeta:

$$F = G\frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \quad \therefore \quad v^2 = G\frac{M}{R}$$

Mas, por outro lado:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \therefore \quad \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = G\frac{M}{R}$$

ou seja

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = constante$$

Órbitas de satélites e energia

Vamos considerar o movimento de dois objetos estelares de massas M e m respectivamente, com interação dada pela Lei de Gravitação Universal, que num dado momento estão distantes entre si uma distância r. Vamos supor ainda que a origem do referencial esteja localizada em M, e para simplificar, que a órbita de m ao redor de M seja uma circunferência - ao invés do caso mais geral que seria uma elipse.

Esse sistema é conservativo, e a Energia Mecânica E é a soma das Energias Cinética K e Potencial U.

$$E = K + U \quad \begin{cases} K = \dfrac{1}{2}mv^2 \\ \\ U = -G\dfrac{Mm}{r} \end{cases}$$

A única força que está atuando é a gravitacional, portanto ela é a força centrípeta, e desse modo:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \because \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} \quad \Rightarrow \quad K(r) = -\frac{1}{2}U(r)$$

e desse modo:

$$E = -\frac{1}{2}U + U \quad \Rightarrow \quad E(r) = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

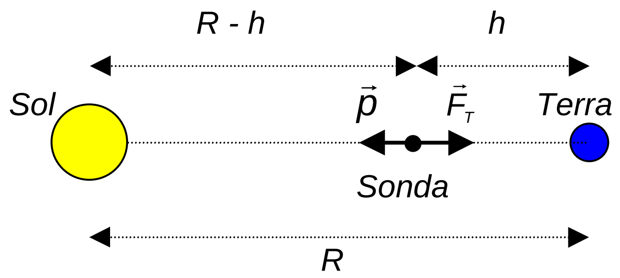
Quando a Energia Mecânica é negativa (como neste caso) temos um sistema fechado pois a partícula não é livre para se libertar do potencial e se afastar para uma distância infinitamente grande. Isso é decorrência do fato da energia potencial (que é negativa) ter um módulo maior que a energia cinética e como consequência a partícula estará presa a este potencial. Em contraposição, a partícula será livre quando a energia mecânica for positiva.

Solução de alguns problemas

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

07 A que distância da Terra, medida ao longo da linha que une os centros da Terra e do Sol, deve estar uma sonda espacial para que a atração gravitacional deste anule a da Terra?

$R = 1{,}5x10^{11}m$
$M_S = 1{,}99x10^{30}kg$
$M_T = 5{,}98x10^{24}kg$



Vamos considerar m a massa da sonda. A uma certa altura h da Terra as duas forças sobre a sonda serão iguais.

As forças que o Sol e a Terra exercem sobre a sonda têm a forma:

$$\begin{cases} F_S = G\dfrac{M_S m}{(R-h)^2} \\ \\ F_T = G\dfrac{M_T m}{h^2} \end{cases}$$

Igualando as duas forças encontramos que:

$$\frac{M_S}{(R-h)^2} = \frac{M_T}{h^2} \quad \therefore \quad \frac{M_S}{M_T}h^2 = (R-h)^2$$

A física do problema está equacionada e resta agora resolver esta equação do segundo grau. Definindo

$$\alpha = \sqrt{\frac{M_S}{M_T}}$$

a equação toma a forma:

$$\alpha h = R - h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{R}{1+\alpha} = \frac{R}{1+\sqrt{\dfrac{M_S}{M_T}}}$$

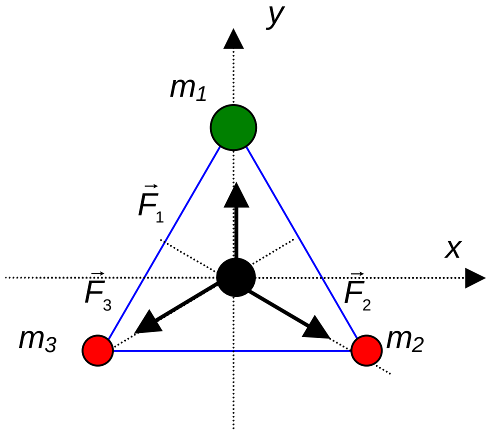
Desse modo:

$$h = 2{,}6 \times 10^8 m$$

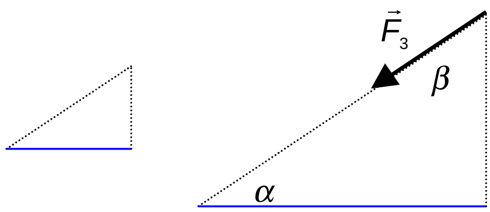
Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

09 Na figura ao lado, duas esferas de massa m (m_2 e m_3) e uma terceira de massa M (m_1) estão nos vértices de um triângulo equilátero, e uma quarta esfera de massa m_4 está no baricentro do triângulo. Se a força gravitacional resultante sobre esta quarta esfera é nula, exprima a massa M em termos da massa m .

$m_1 = M$
$m_2 = m$
$m_3 = m$
m_4



Cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero tem o valor de 60^0 , e portanto o ângulo entre a bissetriz deste ângulo e um dos lados vale 30^0. Quando dividido pelas bissetrizes, o triângulo equilátero dá origem a seis triângulos retângulos como mostrados ao lado. O ângulo $\alpha = 30^0$ por ser a metade da bissetriz e $\beta = 60^0$ por ser complementar a α . Vale lembrar que a esfera central está equidistante (a) das outras três esferas. Com essas considerações, as forças têm a forma:



$$\vec{F} = \hat{i}F_X + \hat{j}F_Y$$

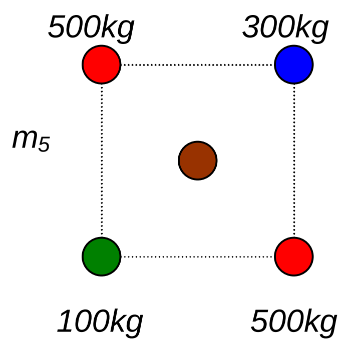
$$F_X = F_2\, sen\beta - F_3\, sen\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_3$$

$$F_Y = F_1 - F_2 \cos\beta - F_3 \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 2\, F_2 \cos\beta = 2\, F_2\, (0,5) \quad \therefore \quad F_1 = F_2$$

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad G\frac{m_4 M}{a^2} = G\frac{m_4 m}{a^2} \quad \therefore \quad M = m$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

10 Na figura à seguir, quatro esferas estão nos vértices de um quadrado de lado $2,0cm$. Qual o módulo e a direção da força gravitacional resultante sobre uma esfera colocada no centro do quadrado com massa $m_5 = 250kg$?



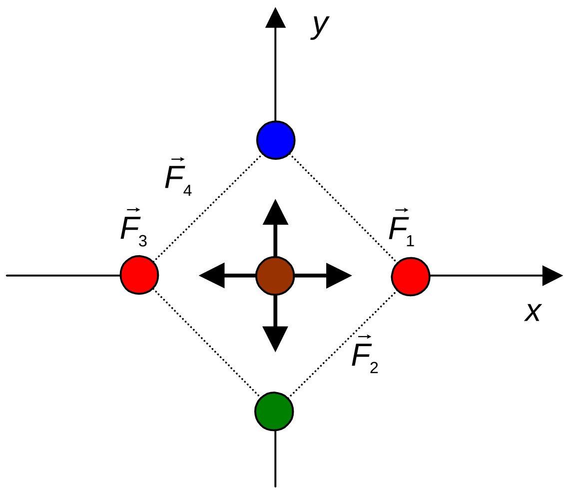
$m_1 = 500kg$
$m_2 = 300kg$
$m_3 = 500kg$
$m_4 = 100kg$
$m_5 = 250kg$
$a = 2cm = 0,02m$

A distância r entre cada vértice e o centro tem a forma:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

ou seja:

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



$$\vec{F} = \hat{i}(F_1 - F_3) + \hat{j}(F_4 - F_2)$$

$$F_X = F_1 - F_3 \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = G\dfrac{m_1 m_5}{r^2} = 2G\dfrac{m_1 m_5}{a^2} \\ F_3 = G\dfrac{m_3 m_5}{r^2} = 2G\dfrac{m_3 m_5}{a^2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_X = 2G\frac{m_5}{a^2}(m_1 - m_3) = 0$$

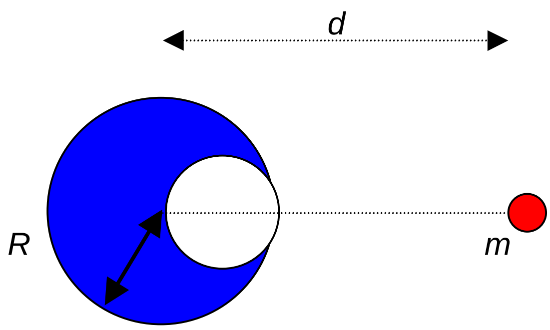
$$F_Y = F_4 - F_2 \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} F_4 = G\dfrac{m_4 m_5}{r^2} = 2G\dfrac{m_4 m_5}{a^2} \\ F_2 = G\dfrac{m_2 m_5}{r^2} = 2G\dfrac{m_2 m_5}{a^2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_Y = 2G\frac{m_5}{a^2}(m_4 - m_2)$$

$$F_Y = 2 \cdot (6{,}67x10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2)\frac{(250kg)}{(0{,}02m)^2}(100kg - 300kg) = -\ 0{,}166N$$

$$\vec{F} = -\hat{j}\,(0{,}166N)$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
13	Fazemos uma cavidade esférica em uma bola de chumbo de raio R , de tal modo que sua superfície toca o exterior da esfera de chumbo, passando também pelo seu centro. A massa da esfera, antes de ser feita a cavidade, era M . Qual a intensidade da força gravitacional com que a esfera côncava atrairá uma pequena esfera de massa m , que está a uma distância d do seu centro, medida ao longo

Vamos lançar mão do seguinte artifício para resolver: vamos considerar que a esfera com uma cavidade é resultado da composição de uma esfera maciça de raio R e de uma *esfera de massa negativa* e raio $R/2$ colocada exatamente no local da cavidade.



A força de interação da esfera com cavidade e a pequena esfera de massa m , será simulada pela interação das esfera maciça e a de massa negativa com a pequena esfera.

Vamos considerar que as esferas têm mesma densidade. Seja V o volume da esfera maciça e V_B o volume do buraco que foi feito numa esfera maciça para construir a esfera côncava. A massa da esfera maciça é:

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

Por outro lado, a massa retirada para fazer o buraco vale:

$$M_B = \rho V_B = \rho \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left[\rho \frac{4}{3}\pi R^3\right] = \frac{M}{8}$$

e portanto a massa M_R que restou depois de ter sido feito o buraco, foi:

$$M_R = M - M_B = \frac{7M}{8}$$

A força da esfera restante de massa $7M/8$ sobre a pequena esfera será:

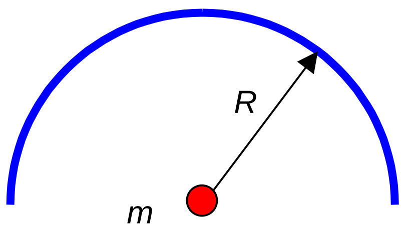
$$F_R = F + F_B = G\frac{mM}{d^2} + G\frac{m(-M_B)}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = G\frac{mM}{d^2}\left[1 - \frac{d^2}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right]$$

e finalmente:

$$F_R = G\frac{mM}{d^2}\left[1 - \frac{1}{8\left(1 - \frac{R}{2d}\right)^2}\right]$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
14	Uma barra fina de massa M é deformada até adquirir a forma de um semicírculo de raio R , como na figura à seguir.

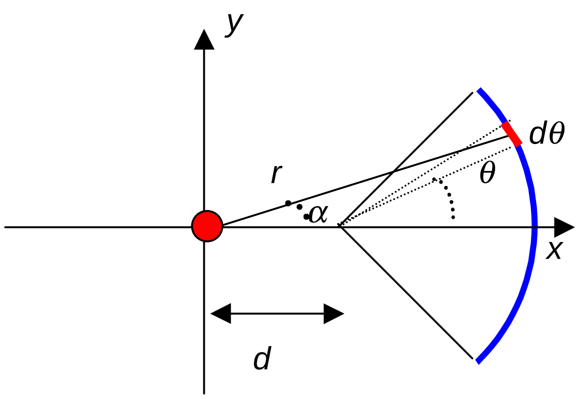
a) Qual é a força gravitacional (em módulo e direção) sobre uma partícula de massa m e colocada no centro de curvatura da barra?



Vamos resolver este problema para uma situação genérica, onde a barra foi deformada de modo a adquirir a forma de um arco de círculo de raio R

mas com um ângulo θ_0 ao invés de π. Vamos colocar a massa m no eixo de simetria do arco, mas a uma distância d do seu centro de curvatura.

Para realizar esse cálculo vamos considerar a força de atração entre a massa m e uma elemento de massa dM que pertence à barra deformada e está localizada a um ângulo θ do centro de curvatura e tem a largura angular de $d\theta$.



O elemento de massa dM está a uma distância r da massa m e a reta que os une faz um ângulo α com o eixo x. A força entre m e dM está na direção da reta que une essas duas massas e tem a forma:

$$dF = G\frac{m\,dM}{r^2} \quad \therefore \quad \begin{cases} dF_X = dF\cos\alpha \\ \\ dF_Y = dF\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

A distância r tem a forma:

$$r^2 = (R\ \mathrm{sen}\theta)^2 + (R\cos\theta + d)^2$$

ou seja:

$$r^2 = R^2 + d^2 + 2\,R\,d\cos\theta$$

e por outro lado:

$$\begin{cases} r\cos\alpha = R\cos\theta + d \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \dfrac{d + R\cos\theta}{r} \\ \\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha = R\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Considerando que a massa da barra tem uma distribuição uniforme, podemos dizer que:

$$M = \lambda\,(R\theta_0) \quad \therefore \quad dM = \lambda\,R\,d\theta$$

e finalmente:

$$dF_X = G\frac{m(\lambda R\,d\theta)}{r^2}\cos\alpha = Gm\lambda R\frac{d + R\cos\theta}{\left(R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right)^{3/2}}d\theta$$

e de maneira equivalente encontramos que

$$dF_Y = G\frac{m(\lambda R\,d\theta)}{r^2}\mathrm{sen}\alpha = Gm\lambda R\frac{\mathrm{sen}\theta}{\left(R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right)}d\theta$$

Integrando essas equações, encontramos:

$$F_X = G\frac{mM}{\theta_0}\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}}\frac{d + R\cos\theta}{\left(R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right)^{3/2}}d\theta$$

$$F_Y = G\frac{mM}{\theta_0}\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}}\frac{\text{sen}\,\theta}{\left(R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right)^{3/2}}d\theta$$

A integral que define F_Y tem solução simples, fazendo-se as substituições:

$$\begin{cases} u = R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta \\ du = -2Rd\,\text{sen}\,\theta\, d\theta \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{aligned} u_I &= R^2 + d^2 + 2Rd\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ u_S &= R^2 + d^2 + 2Rd\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \text{sen}\,\theta\, d\theta &= -\frac{du}{2Rd} \end{aligned}$$

$$F_Y = -G\frac{mM}{\theta_0}\frac{1}{2Rd}\int_{u_I}^{u_S}\frac{du}{u^{3/2}}$$

como o limite inferior u_I é igual ao limite superior u_F essa integral é nula. e desse modo é nula a componente y da força de interação. esse resultado já poderia ser antecipado se tivéssemos considerado que cada elemento de massa acima do eixo x produz uma contribuição para F_Y que será anulada por um elemento simétrico a ele abaixo do eixo x .

Já a equação que define F_X não tem solução exata nas condições que foi proposta.

$$F_X = G\frac{mM}{\theta_0}\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}}\frac{d + R\cos\theta}{\left(R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right)^{3/2}}d\theta$$

Vamos considerar algumas situações típicas.

1. Inicialmente vamos analisar a situação em que a barra e a massa estão muito distantes uma da outra. Em outra palavras $d >> R$ e a integral toma a forma:

$$F_X = G\frac{mM}{\theta_0}\frac{d}{d^3}\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}}d\theta = G\frac{mM}{\theta_0}\frac{1}{d^2}\theta_0 \quad \therefore \quad F_X = G\frac{mM}{d^2}$$

e esse resultado nos diz que a barra e a massa quando estão muito distante se atraem como se fossem massas pontuais.
Em segundo lugar vamos analisar as diversas possibilidades que acontecem quando $d = 0$.

$$F_X = G\frac{mM}{\theta_0}\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}}\frac{R\cos\theta}{\left(R^2\right)^{3/2}}d\theta = G\frac{mM}{\theta_0 R^2}\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}}\cos\theta\, d\theta = 2G\frac{mM}{\theta_0 R^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

Se escolhermos $\theta_0 = \pi$, como no caso proposto neste problema:

$$F_X = \frac{2}{\pi}\frac{GmM}{R^2}$$

b) Qual seria a força gravitacional sobre m se a barra tivesse a forma de um círculo completo?

Usando o resultado do item anterior é fácil perceber que quando $\theta_0 = 2\pi$ a força F_X é nula.

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
17	A maior velocidade de rotação possível para um planeta é aquela em que a força gravitacional, exercida sobre a matéria em seu equador, é exatamente igual à força centrípeta necessária para manter essa matéria em rotação.

0) Porquê?

Podemos considerar um modelo para esse objeto como sendo composto de matéria fria e sólida como a Lua, Terra e etc. Mas por outro lado podemos considerando que o objeto estelar é composto de matéria não sólida, como as estrelas. O que mantém esse objeto coeso? É basicamente a interação gravitacional ou entra em questão outro tipo de interação entre a matéria.

Na situação mais simples, existe apenas a interação gravitacional. Desse modo, se a velocidade de revolução do objeto for maior que aquela possível de mantê-lo coeso através da atração gravitacional ele simplesmente irá perdendo matéria que será ejetada pois ele não consegue mantê-la coesa.

a) Mostre que o período de rotação mínimo, correspondente a tais condições, é dado por:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

onde ρ é a densidade do planeta que supomos ser homogêneo.

Vamos considerar a interação entre uma pequena massa m que está na superfície da Terra com toda a massa da Terra:

$$F = G\frac{mM_T}{R_T} = m\frac{v^2}{R_T}$$

$$G\frac{M_T}{R_T} = v^2 = \left(\frac{2\pi R_T}{T}\right)^2 \quad \therefore \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}R_T^3$$

ou ainda:

$$T^2 = \frac{3\pi}{GM_T}\left(\frac{4}{3}\pi R_T^3\right) = \frac{3\pi}{G\rho} \quad \therefore \quad T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

b) Calcule o período de oscilação, considerando uma densidade igual a $3g/cm^3$, que é típica de muitos planetas, satélites e asteróides. Nunca foi encontrado um objeto astronômico com período de rotação menor que o determinado pela análise feita neste problema.

$\rho = 3g/cm^3 = 3x10^3kg/m^3$
$G = 6,67x10^{-11}m^3/kg.s^2$

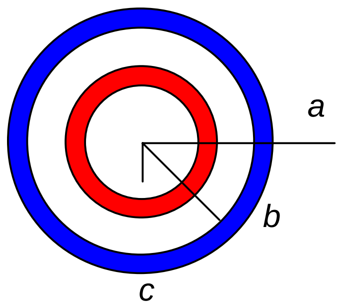
Depois dos cálculos, encontramos que:

$$T = 6,86x10^3s = 114,33min = 1,90h$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
22	Duas cascas concêntricas de densidade uniforme, têm massa M_1 (interna) e M_2 (externa) e estão distribuídas como mostra a figura ao lado. Calcule a força gravitacional sobre uma partícula de massa m quando ela estiver em:

a) $r = a$

O ponto a é externo às duas cascas esféricas e portanto a massa m sente o efeito da presença das duas cascas. Elas se comportam como se toda a massa de cada uma delas estivesse no seu centro geométrico. Desse modo a força que as cascas exercem tem a forma:



$$F_A = F_1 + F_2 = -G\frac{M_1m}{a^2} - G\frac{M_2m}{a^2} = -G\frac{(M_1+M_2)m}{a^2}$$

b) $r = b$

O ponto b é externo à casca esférica de massa M_1 e interno à casca esférica de massa M_2, e desse modo a massa m não sentirá o efeito da presença da casca M_2 que a envolve. A força que a casca esférica de massa M_1 exerce é:

$$F_B = -G\frac{M_1m}{b^2}$$

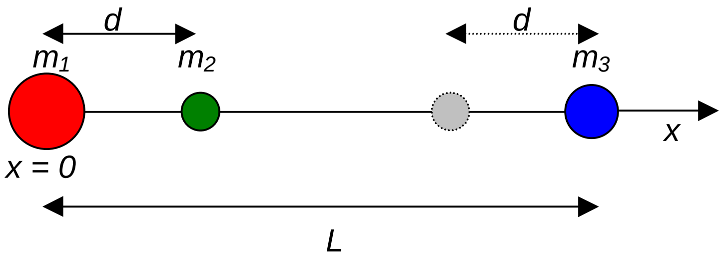
c) $r = c$
O ponto c é interno às duas cascas e portanto não existirá força gravitacional atuando na massa m.

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

31 As três esferas na figura à seguir, com massas $m_1 = 800g$, $m_2 = 100g$ e $m_3 = 200g$, estão com os seus centros alinhados, sendo $L = 12cm$ e $d = 4cm$. Você movimenta a esfera do meio até que a sua distância centro a centro de m_3 seja $d = 4cm$.

a) Qual o trabalho realizado sobre m_2 por você?

Vamos considerar a origem do eixo x no centro da esfera de massa m_1 . O trabalho é definido como:



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Podemos levar a esfera m_2 da posição inicial A até a posição final B de diversas maneiras. O modo mais trivial será exercer sobre essa massa uma força tal que anule a força gravitacional resultante, e desse modo o movimento se dará como velocidade constante. A força resultante sobre a esfera m_2 , quando ela está em um ponto genérico x entre as duas outras esferas, tem a forma:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = -\hat{i}G\frac{m_1 m_2}{x^2} + \hat{i}G\frac{m_3 m_2}{(L-x)^2}$$

onde na posição inicial A temos $x = d$ e na posição final B temos $x = L - d$. Como vamos exercer uma força que anule a força resultante, devemos ter:

$$\vec{F} = -\vec{F}_R = \hat{i}Gm_2\left[\frac{m_1}{x^2} - \frac{m_3}{(L-x)^2}\right]$$

O vetor deslocamento é definido com $d\vec{l} = \hat{i}\,dx$, e desse modo:

$$W_{AB} = Gm_2\int_d^{L-d}\left[\frac{m_1}{x^2} - \frac{m_3}{(L-x)^2}\right]dx$$

ou seja:

$$W_{AB} = Gm_1 m_2\int_d^{L-d}\frac{dx}{x^2} - Gm_3 m_2\int_d^{L-d}\frac{dx}{(L-x)^2}$$

Fazendo a substituição $u = L - x$ na segunda integral I_2 , encontramos que:

$$\begin{cases} u = L - x \\ du = -dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = d \rightarrow u_A = L - d \\ x_B = L - d \rightarrow u_B = d \end{cases}$$

ou seja:

$$I_2 = -Gm_3m_2\int_d^{L-d}\frac{dx}{(L-x)^2} = +Gm_3m_2\int_{L-d}^{d}\frac{du}{u^2} = -Gm_3m_2\int_d^{L-d}\frac{du}{u^2}$$

Desse modo, temos então que W_{AB} toma a forma:

$$W_{AB} = G(m_1 - m_3)m_2\int_d^{L-d}\frac{dx}{x^2} = -G(m_1-m_3)m_2\left.\frac{1}{x}\right|_d^{L-d} = -G(m_1-m_3)m_2\left[\frac{1}{L-d}-\frac{1}{d}\right]$$

$$W_{AB} = G(m_1-m_3)m_2\left[\frac{L-2d}{(L-d)d}\right] = 5{,}0x10^{-11} Joules$$

b) Qual o trabalho realizado sobre m_2 pela força gravitacional resultante sobre m_2 devido às outras esferas?

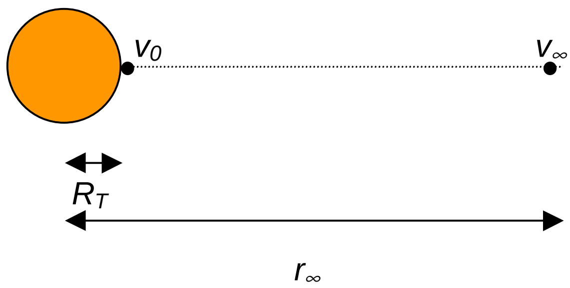
Como já foi indicado, o trabalho da força resultante tem sinal contrário ao trabalho calculado anteriormente:

$$W_F = - W_{AB} = - 5{,}0x10^{-11} Joules$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
33	Um foguete é acelerado até uma velocidade $v_0 = 2\sqrt{gR_T}$ próximo à superfície da Terra (aqui R_T é o raio da Terra) e, então, orientado para cima.

a) Mostre que ele escapará da Terra.

Vamos inicialmente calcular a velocidade de escape de um objeto da superfície da Terra. Em outras palavras, qual deve ser a velocidade de um objeto na superfície da Terra para que ele consiga escapar da influência de nosso planeta?



A energia mecânica de um objeto de massa m que está sob a influência de uma força gravitacional é a soma de suas energias cinética e potencial gravitacional, ou seja:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r^2}$$

onde M é a massa do segundo objeto e r é a distância entre eles. A órbita do objeto de massa m irá depender do valor de sua energia mecânica E. As possíveis órbitas são:

$$E < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{órbita fechada - elipse}$$
$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{caso limite - parábola}$$
$$E > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{órbita aberta - hipérbole}$$

Como queremos calcular a velocidade mínima para o objeto escapar (órbita aberta), vamos considerar a possibilidade $E = 0$, ou seja:

$$E = \frac{1}{2}mv_E^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_E = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

A forma velocidade de escape v_E pode ser colocada em outros termos se considerarmos que:

$$mg = G\frac{mM_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

e finalmente temos que

$$v_E = \sqrt{2R_T g}$$

No nosso problema temos um objeto que é lançado com velocidade $v_0 = 2\sqrt{gR_T}$, e como $v_0 > v_E$ o objeto escapará.

b) Mostre que a sua velocidade, quando estiver muito distante da Terra, será

$$v_\infty = \sqrt{2gR_T} \ .$$

Com essa velocidade na superfície da Terra, a energia mecânica do objeto será:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = \frac{1}{2}m(4gR_T) - mgR_T \quad \Rightarrow \quad E = mgR_T$$

Num ponto muito longe da superfície da Terra $r \to \infty$ e a energia potencial gravitacional é nula. Desse modo a energia mecânica é puramente cinética e portanto:

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

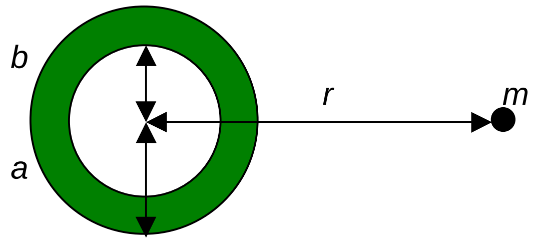
onde v_∞ é a velocidade do objeto quando estiver muito distante. Igualando as energias nas duas situações, encontramos que:

$$E = mgR_T = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \sqrt{2gR_T}$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
52	Uma esfera de massa M e raio a tem uma cavidade concêntrica de raio b , como é mostrado na figura à seguir.

a) Faça um esboço do gráfico da força gravitacional F exercida pela esfera sobre uma partícula de massa m a uma distância r do centro da esfera, em função de r entre os limites $0 < r < \infty$. Considere em particular os pontos $r = 0, b , a$ e ∞ .

Quando a partícula está numa posição externa à esfera, ele sente a interação como se toda a massa de esfera estivesse em seu centro. Desse modo:



$$r \geq a \quad \Rightarrow \quad F(r) = -G\frac{mM}{r^2}$$

Quando a partícula estiver no interior da esfera num ponto a uma distância r do seu centro, apenas a massa da esfera localizada na região mais interna que r exercerá força gravitacional sobre essa partícula. A massa *M(r)* da esfera que irá exercer essa força é calculada como:

$$M(r) = \rho V(r) = \rho\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - b^3\right)$$

Mas a massa total da esfera pode ser escrita como:

$$M = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi\left(a^3 - b^3\right)$$

de onde encontramos que:

$$M(r) = \left[\frac{M}{a^3 - b^3}\right]\left(r^3 - b^3\right)$$

A força gravitacional terá a forma:

$$F(r) = -G\frac{M(r)m}{r^2} = -G\frac{m}{r^2}\left[\frac{M}{a^3 - b^3}\right]\left(r^3 - b^3\right)$$

e finalmente podemos concluir que:

$$b \leq r \leq a \quad \Rightarrow \quad F(r) = -\left(\frac{GmM}{a^3 - b^3}\right)\left(r - \frac{b^3}{r^2}\right)$$

Quando a partícula estiver no interior da cavidade será nula a força gravitacional exercida pela esfera, e portanto:

$$r \leq b \quad \Rightarrow \quad F(r) = 0$$

b) Esboce também o gráfico da energia potencial gravitacional *U(r)* deste sistema

De modo equivalente ao caso da força podemos dizer que quando a partícula está numa posição externa à esfera, ele sente a interação como se toda a massa de esfera estivesse em seu centro. Desse modo:

$$r \geq a \quad \Rightarrow \quad V(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Para calcular a energia potencial gravitacional no interior da esfera vamos usar os resultados dos cálculos da força. A definição variação de energia potencial é dada por:

$$U_I - U_F = -\int_I^F \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Vamos considerar a posição inicial um ponto distante de a do centro, localizado na superfície externa da esfera. O ponto final será interior à esfera:

$$U(r) = U(a) - \int_a^r \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Mas por outro lado:

$$\begin{cases} \vec{F} = -\hat{r}\,F(r) \\ \\ d\vec{l} = -\hat{r}\,dl = \hat{r}\,dr \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot d\vec{l} = -F(r)dr$$

$$U(r) = U(a) + \int_a^r F(r)dr$$

$$U(r) = U(a) - \int_a^r \left(\frac{GmM}{a^3 - b^3}\right)\left(r - \frac{b^3}{r^2}\right)dr$$

$$U(r) = U(a) - \frac{GmM}{a^3 - b^3}\left\{\left.\frac{r^2}{2}\right|_a^r + b^3 \left.\frac{1}{r}\right|_a^r\right\}$$

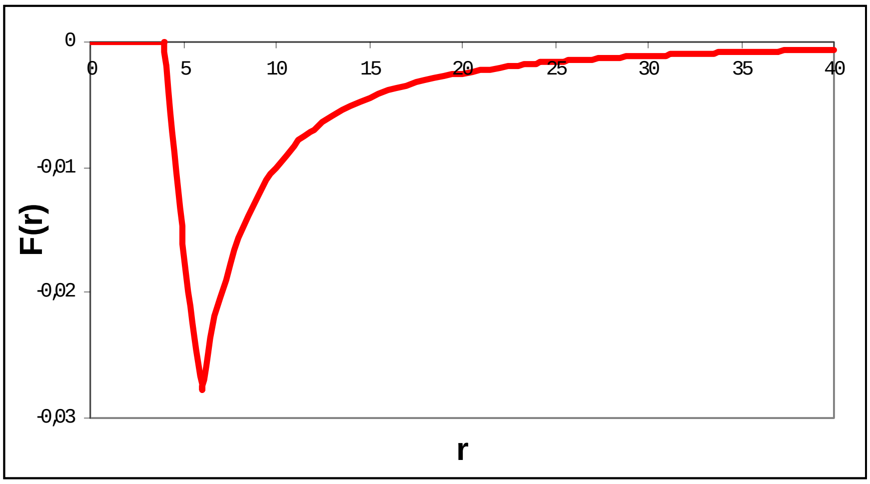
$$b \le r \le a \quad \Rightarrow \quad U(r) = -G\frac{mM}{a} - \frac{GmM}{a^3 - b^3}\left\{\frac{r^2 - a^2}{2} + b^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\right\}$$

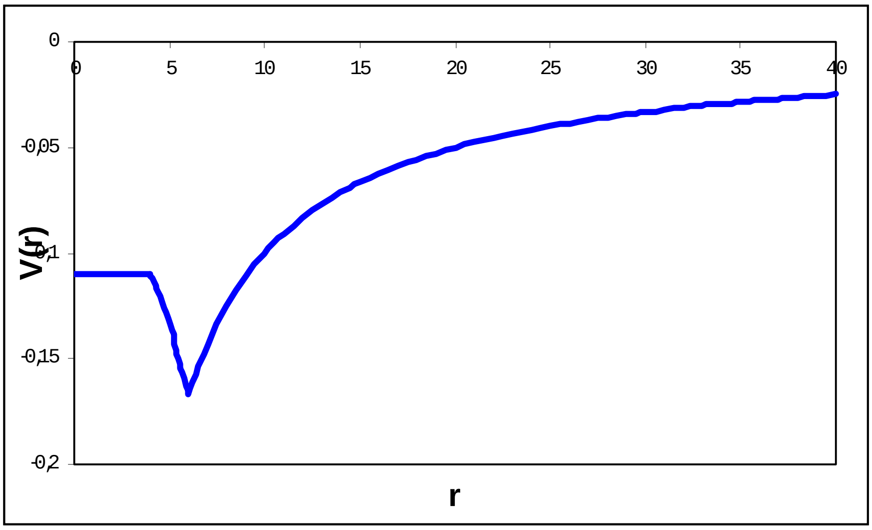
e para $r \le b$, a energia potencial assume um valor constante em toda essa região, e desse modo, esse valor constante será aquele do limite dessa região.

Assim

$$0 \le r \le b \quad \Rightarrow \quad U(r) = -G\frac{mM}{a} - \frac{GmM}{a^3 - b^3}\left\{\frac{b^2 - a^2}{2} + b^3\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right\}$$

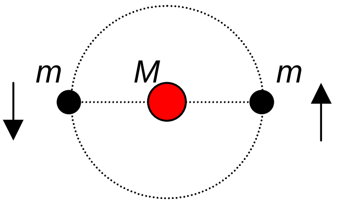
Vamos usar nos gráficos os valores $a = 6m$ e $b = 4m$.





Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
54	Um sistema particular de três estrelas é formado por duas estrelas, cada uma de massa m , em órbita ao redor de uma estrela central de massa M , ocupando a mesma órbita circular de raio r . As duas estrelas estão, sempre, uma em cada extremo de um diâmetro da órbita. Deduza uma expressão para o período orbital das estrelas menores.

Cada uma das massas sente a interação das outras duas. Cada uma das massas menores sente a força dada por:



$$F = G\frac{mM}{r^2} + G\frac{m^2}{(2r)^2} = G\frac{m}{r^2}\left(M + \frac{m}{4}\right)$$

Mas a força resultante sobre cada uma das massas menores, pode ser colocada como a força centrípeta que age sobre ela, e desse modo, temos:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Igualando as duas últimas equações encontramos que:

$$v^2 = \frac{G}{r}\left(M + \frac{m}{4}\right) = \left(\frac{2\pi r}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad T^2 = \left\{\frac{4\pi}{G\left(M + \frac{m}{4}\right)}\right\} r^3$$

ou seja:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi r^3}{G\left(M + \frac{m}{4}\right)}}$$